

様式 6

論文目録

報告番号	甲 丁 乙 工 第 113 号 工 修	氏名	北 島 博 之
学位論文題目	非線形系の構造に基づく分岐現象とカオスの解析		
論文の目次			
第 1 章 まえがき 第 2 章 回路にみられる分岐 第 3 章 2 個結合した発振器系の解析 第 4 章 巡回結合発振器の解析 第 5 章 余次元の高い分岐とカオス 第 6 章 自動追跡アルゴリズム 第 7 章 むすび			
参考論文 主論文			
1. 北島博之, 川上 博. "接線分岐曲線を自動追跡するアルゴリズムとその Duffing 方程式への応用". 電子情報通信学会論文誌, Vol. J78-A, No.7, pp. 806-810, 1995. 2. T. Yoshinaga, H. Kitajima and H. Kawakami. "Bifurcations in a Coupled Rössler System". IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E78-A, No.10, pp.1276-1280, 1995. 3. 北島博之, 川上 博. "固定点多様体を追跡する 1 アルゴリズムについて". 電子情報通信学会論文誌, Vol.J79-A, No.5, pp.1122-1124, 1996. 4. H. Kitajima, T. Yoshinaga and H. Kawakami. "Codimension Two Bifurcation Observed in a Phase Converter Circuit". IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E79-A, No.10, pp.1563-1567, 1996. 5. 北島博之, 川上 博. "周期倍分岐と Neimark-Sacker 分岐列について". 電子情報通信学会論文誌, Vol.J80-A, No.3, pp.491-498, 1997.			
副論文			
1. H. Kitajima, T. Yoshinaga and H. Kawakami. "Synchronization in Two Coupled Oscillators with Three Ports". Proceeding of 1994 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, pp.89-92, 1994. 2. H. Kitajima, T. Yoshinaga and H. Kawakami. "Codimension Two Bifurcation Observed in a Phase Converter Circuit". Proceedings of 1995 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, pp.335-338, 1995. 3. H. Kitajima and H. Kawakami. "Bifurcation of a Unidirectional Coupled Oscillators". Proceeding of 1996 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, pp.21-24, 1996. 4. T. Yoshinaga, H. Kitajima, H. Kawakami and C. Mira. "A Method to Calculate Homoclinic Points of a Two-dimensional Noninvertible Map". IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E80-A, No.9, pp.1560-1566, 1997. 5. H. Kitajima and H. Kawakami. "Bifurcation and Chaos in Unidirectionally Coupled Oscillators". Proceedings of 1997 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, pp.65-68, 1997. 6. H. Kitajima, Y. Noumi and H. Kawakami. "Forced Synchronization of Coupled Oscillators". Proceeding of 1997 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, pp.573-576, 1997. 7. H. Kitajima, Y. Katsuta and H. Kawakami. "Bifurcations of Periodic Solutions in a Coupled Oscillator with Voltage Ports". IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E81-A, 1998 (印刷中).			

備考

- 論文目録は, 用語が英語以外の外国語のときは日本語訳をつけて, 外国語, 日本語の順に列記すること.
- 参考論文は, 論文題目, 著者名, 公刊の方法及び時期を順に明記すること.
- 参考論文は, 博士論文の場合に記載すること.

様式 7

論文内容要旨

報告番号	甲 工 乙 工 第 1 1 3 号 工 修	氏名	北 島 博 之
学位論文題目	非線形系の構造に基づく分岐現象とカオスの解析		
<p>本論文は、結合発振器系の分岐現象、余次元の高い分岐とカオス、分岐集合を求めるアルゴリズムについて述べている。結合発振器は指の協調運動、動物の歩行、睡眠・覚醒のリズムなど、生物の様々なリズム現象を表すモデルとして広く用いられる。本論文では分岐理論と対称性を用いて、それらの現象の起こるメカニズムを探る。</p> <p>第3章では、2個の発振器を抵抗で結合した系の解析結果を示す。n個の発振器を結合した一般形を場合を考えると、発振器の個数が偶数であれば、2個結合系の分岐構造を必ず含むことより、2個の結合系は結合系の最も基本であると考え。系にみられる対称性を用いて、平衡点と周期解を分類する。それぞれの解の分岐集合を求めることにより、異なる対称性をもつ平衡点と周期解がどのように遷移するのかを明らかにする。対称性のない周期解が周期倍分岐の連鎖によりカオスへと至る遷移を観測したので示す。第4章では、発振器を環状に一方方向と双方方向に結合した系の解析結果を示す。結合部分だけに着目すると、一方方向性結合では巡回群、双方方向性結合では2面体群をもつ。結合する発振器が平衡点のみをもつ場合と、平衡点と周期解の両方をもつ場合にわけて考える。平衡点のみをもつ場合は、n個の発振器を結合した一般形での平衡点の分岐構造を解析する。結果として、双方方向性結合では結合した系では発振は起こらず、一方方向性結合ではHopf分岐によりn相周期解が生じることを得た。単体の発振器が周期解をもつ場合では、周期解の分岐を調べるため、一般形での解析が困難となる。従って発振器の個数を3個に限定して解析する。2個結合の場合と同様に対称性により、平衡点と周期解を分類する。</p> <p>第5章では余次元2の分岐の連鎖、余次元3の分岐の連鎖によるカオスへの遷移を解析する。一般的に高次元となる結合発振器系において、余次元1および2の分岐集合が互いに交わる退化した現象は普遍的にみられる。本章ではこれらの現象がみられる最小次元系において、余次元2・3の分岐値付近での分岐構造を解析する。得られた結果は、結合発振器系の解析に有用であると考え。</p> <p>第6章では、分岐集合を数値計算により求める場合の自動追跡アルゴリズムを示す。接線分岐集合または固定点多様体を求める場合、従来のアルゴリズムでは特異点において計算が止まっていたが、6.1、6.2節のアルゴリズムを用いることにより、連続的に接線分岐集合または固定点多様体を求めることが可能となる。Duffing方程式、Duffing-Rayleigh方程式を用いてアルゴリズムの正当性および有用性を示した。</p>			



非線形系の構造に基づく分岐現象
とカオスの解析

1998年 3 月

北島 博之

2

非線形系の構造に基づく分岐現象
とカオスの解析

1998年3月

北島 博之

目次

1	まえがき	1
2	回路にみられる分岐	3
2.1	平衡点の分岐	3
2.2	周期解の分岐	4
2.2.1	余次元 1 の分岐	5
2.2.2	余次元 2 の分岐	5
3	2 個結合した発振器系の解析	7
3.1	まえがき	7
3.2	単体の発振器の分岐	7
3.3	結合系の回路方程式	10
3.4	対称性の定義	11
3.5	平衡点と周期解の分類	12
3.6	平衡点の分岐	15
3.7	周期解の分岐	20
3.8	むすび	31
4	巡回結合発振器の解析	33
4.1	まえがき	33
4.2	回路方程式と対称性	34
4.2.1	一方向性結合	34
4.2.2	双方向性結合	35
4.3	単体の発振器が発振しない場合での結合	35
4.3.1	一方向性結合	35
4.3.1.1	ヤコビ行列のブロック対角化	35
4.3.1.2	分岐集合の計算	38
4.3.1.3	$n \geq 12$ の場合	39
4.3.2	双方向性結合	44
4.3.2.1	ヤコビ行列のブロック対角化	44
4.3.2.2	分岐集合の計算	45
4.4	単体の発振器が発振する場合での結合	48
4.4.1	一方向性結合	48
4.4.1.1	平衡点と周期解の分類	48

4.4.1.2	平衡点と周期解の分岐	49
4.4.1.3	発振器の個数と単体の発振器の特性の関係	58
4.4.2	双方向性結合	60
4.4.2.1	平衡点の分類	60
4.4.2.2	平衡点の分岐	61
4.4.2.3	発振器の周波数が異なる場合	67
4.4.2.4	結合係数の異なる場合	67
4.4.3	その他の結合方式	71
4.4.3.1	結合部分に2面体群 D_3 をもつ発振器回路	71
4.4.3.2	結合部分に4元数群 Q_8 をもつ発振器回路	74
4.5	むすび	77
5	余次元の高い分岐とカオス	79
5.1	周期倍分岐と Neimark-Sacker 分岐列について	79
5.1.1	まえがき	79
5.1.2	回路方程式	80
5.1.3	解析結果	81
5.1.3.1	パラメータ ν の決定	81
5.1.3.2	P^2 分岐の連鎖と準周期解の分岐	82
5.1.3.3	Neimark-Sacker 分岐集合に接する分数調波同期化領域	88
5.1.4	むすび	98
5.2	位相変換器回路にみられる余次元2の分岐	99
5.2.1	まえがき	99
5.2.2	解析結果	100
5.2.2.1	パラメータ値の決定	100
5.2.2.2	結合のない場合の分岐	100
5.2.2.3	結合した場合の分岐	102
5.2.3	むすび	107
6	自動追跡アルゴリズム	111
6.1	接線分岐曲線追跡	111
6.1.1	まえがき	111
6.1.2	アルゴリズム	111
6.1.3	Duffing 方程式への応用例	114
6.1.4	むすび	116
6.2	固定点多様体追跡	119
6.2.1	まえがき	119
6.2.2	アルゴリズム	119
6.2.3	Duffing-Rayleigh 方程式への応用例	120
6.2.4	むすび	121
7	むすび	123

A	群の乗積表	125
A.1	巡回群 C_3 と 二面体群 D_3	125
A.2	4元数群 Q_8	125
B	余次元の高い分岐の分類	129
B.1	周期倍分岐どうしの交わり	129
B.2	D 型分枝どうしの交わり	131
B.3	D 型分枝と周期倍分岐の交わり	133
B.4	D 型分枝と Neimark-Sacker 分岐の交わり	134
	謝辞	137
	文献	139
	参考文献	139
	本研究に関連する原著論文	142
	本研究に関連する国際会議	142
	本研究に関連する学会研究会資料等	143

第 1 章

まえがき

生物は生物リズム (biological rhythm) あるいは生体リズム (biorhythm) とよばれるリズム運動を行っている。例えば脳波、心臓の拍動、睡眠・覚醒、体温などである。リズム運動は周期により区別され、ウルトラディアン・リズム (ultradian rhythm)、サーカディアン・リズム (circadian rhythm)、インフラディアン・リズム (infradian rhythm)、サーカニユアル・リズム (circannual rhythm) などとよばれる。それらのリズム運動において、特に同期現象が注目されている。同期現象の解析手法の一つとして結合発振器を用いたモデル化があり、指の協調運動 [1]、動物の歩行 [2]、睡眠・覚醒のリズム [3] など、生物の様々なリズム現象を表すモデルとして広く用いられている。実際に生物のリズム運動は、時間の手掛かりの全くない状況でもリズムを示すことより、生体内にはリズムの発振器が存在することが考えられる [4]。

結合発振器を用いて種々の発振モードを起こすことや、分岐現象を解析することは、モデルとして優れているか否かを知るために大変重要である。しかし、同一の発振器を結合した系においては対称性が強くなり、一度の分岐で多数個の解が現れるなど、退化した現象が多くみられるようになる。そのために現象としては興味深いが、その発生機構を解明することは困難となるので、十分な解析がなされていない。

本論文では分岐理論と対称性を用いて、結合発振器系の相互同期と外力が注入された系の強制同期の解析を行う。結合発振器系において多くの発振パターンを得るために、結合方法を従来とは異なる一方向性結合とした。平衡点や周期解の分岐集合を計算することにより、パラメータ空間での安定な発振領域や、系の同期化領域を特定することが可能となる。それらは結合発振器系を電気回路を用いて実現する場合に、パラメータの設定に関して有益な情報を与えてくれる。

各章の内容を以下にまとめる：

第 2 章では回路に起こる余次元 1 の分岐について、平衡点と周期解にわけて述べる。周期解については、文献 [5] において分類された 6 種類の余次元 2 の分岐も示す。

第 3 章では、2 個の発振器を抵抗で電圧結合した系の解析結果を示す。電流およびハイブリッド結合した系の結果も比較のために示す。 n 個の発振器を結合した一般形を場合を考えると、発振器の個数が偶数であれば、2 個結合系の分岐構造を必ず含むことより、2 個の結合系は結合系の最も基本であると考え、系にみられる対称性を用いて、平衡点と周期解を分類する。それぞれの解の分岐集合を求めることにより、異なる対称性をもつ平衡点と周期解がどのように遷移するのかを明らかにする。周期倍分岐の連鎖によるカオス振動が観測されたのでその結果を示す。

第4章では、発振器を環状に一方方向と双方方向に結合した系の解析結果を示す。結合部分だけに着目すると、一方方向性結合では巡回群、双方方向性結合では2面体群をもつ。4.3節では単体の発振器が発振しない状態で n 個、環状に結合した系の安定な周期解の発生条件を調べる。2次元常微分方程式で記述される発振器を n 個一方方向結合した一般的な場合について、 n が偶数か奇数かによりどのように発振現象に変化が起こるかを分岐理論を用いて解析を行う。平衡点の Hopf 分岐集合を求めることにより、 $n < 12$ では奇数個の場合のみ n 相発振を起こし、偶数個では安定な n 相解は得られないことが明らかとなる。 $n \geq 12$ では奇数、偶数に関わらず、発振を起こす。双方方向結合ではいずれの場合も安定な周期解は得られない。4.4節では単体の発振器が発振する状態で結合した系の周期解の分岐を考える。4.3節で示した平衡点の分岐問題はすでに報告されているが [6]、周期解の分岐についての研究は数少ない。そこで周期解の分岐構造を解明する必要がある。結合する発振器の個数が n 個の一般形での解析が困難であるために、3個に限定して解析を行う。3章の2個結合の場合と同様に、対称性により平衡点と周期解を分類する。分類した解の分岐集合を求めることにより、異なる対称性をもつ解の間の遷移を示す。分岐集合の数値計算において、周期倍分岐の連鎖による対称性のないカオス・リペラを観測したのでその結果を示す。4.4.3節では一方方向と双方方向の結合を混合させて結合部分に2面体群 D_3 と4元数群 Q_8 をもつ結合回路を構成する。それぞれの回路において得られる安定な発振パターンを分類し、通常発振器を3個結合した D_3 対称回路において得ることのできなかった逆相発振パターンを得た。

第5章では余次元2の分岐の連鎖、余次元3の分岐の連鎖によるカオスへの遷移を解析する。一般的に高次元となる結合発振器系において、余次元1および2の分岐集合が互いに交わる退化した現象は普遍的にみられる。本章ではこれらの現象がみられる最小次元系において、余次元2・3の分岐値付近での分岐構造を解析する。得られた結果は、結合発振器系の場合の解析に有用であると考えられる。5.1節では P^2 分岐の連鎖を調べ、文献 [5] においては議論されていない準周期解（ポアンカレ写像での不変閉曲線）の分岐も含めた分岐構造を明らかにする。固定点が倍周期化されるのに従い、不変閉曲線も巻数が倍になり、倍になる前の不変閉曲線と消滅する。5.2節では周期倍分岐集合どうしの交わりから、D型分枝と周期倍分岐の交わりによる余次元3の分岐の連鎖が生じ、カオスへと遷移する様子を示す。結果生じるカオスには2つのタイプ：(1) カオス・アトラクタ、(2) サドル型カオスがある。後者のカオスは分岐集合を求めることによりのみ、その存在を示すことが可能となる。

第6章では、分岐集合を数値計算により求める場合の便利なアルゴリズムを示す。接線分岐集合を求める場合、従来のアルゴリズムでは余次元2の分岐の1つであるカusp点で計算が止まっていたが、6.1節のアルゴリズムを用いることにより、連続的に接線分岐集合を求めることが可能となる。Duffing 方程式での例題を示し、複雑にカusp点が存在するパラメータ領域での接線分岐集合を求め、複雑な共振現象の解析を行う。6.2節では、固定点多様体を追跡する場合に、接線分岐集合上でも止まらずに連続的に追跡することが可能なアルゴリズムを提案する。Duffing-Rayleigh 方程式に応用することにより、アルゴリズムの正当性を示す。

第7章では本論文のまとめを述べる。

第2章

回路にみられる分岐

2.1 平衡点の分岐

常微分方程式で記述される自律系：

$$\frac{dx}{dt} = f_a(x, \lambda), \quad x \in R^{n+1}, \lambda \in R \quad (2.1.1)$$

と非自律系：

$$\frac{dx}{dt} = f_n(t, x, \lambda), \quad x \in R^n, \lambda \in R \quad (2.1.2)$$

を扱う。ここで x は状態変数、 λ はパラメータ、 t は時刻を表す。 f_a, f_n は各変数について必要な回数だけ微分可能とし、非自律系の場合の f_n は時間 t に関して周期的：

$$f_n(t, x, \lambda) = f_n(t + \tau, x, \lambda), \quad \forall t \quad (2.1.3)$$

であると仮定する。ここに τ は周期を表す。式 (2.1.1) において平衡点 e_0 は

$$f_a(e_0, \lambda) = 0 \quad (2.1.4)$$

を満たす。平衡点 e_0 における式 (2.1.1) のヤコビ行列を

$$Df(e_0, \lambda) = \frac{\partial f(e_0, \lambda)}{\partial x} \quad (2.1.5)$$

として、この行列の特性方程式を

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_n - Df(e_0, \lambda)) = \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n = 0 \quad (2.1.6)$$

とする。双曲型平衡点では、すべての特性乗数について

$$\operatorname{Re}(\mu_i) \neq 0 \quad (2.1.7)$$

となっている。パラメータを変化させたとき、特性乗数についてこの条件が1つでも崩れるとそのパラメータ値で分岐が起こる。平衡点の分岐には、次にあげる3つがある。

- (1) 接線分岐 (tangent bifurcation or saddle-node bifurcation) 特性乗数が0となるパラメータ値において、平衡点对の発生・消滅が起こる。

$$\phi \leftrightarrow {}_k O + {}_{k+1} O \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.1.8)$$

ここで ϕ は平衡点が存在しないことを表す。 O は平衡点を示し、左下の添字は不安定次元を表す。

- (2) Hopf 分岐 (Hopf bifurcation) 特性乗数が純虚数となるパラメータ値において、周期解の発生・消滅が起こる。

$$\begin{aligned} {}_k O &\leftrightarrow {}_{k+2} O + {}_k D \\ {}_k O + {}_{k+1} D &\leftrightarrow {}_{k+2} O \end{aligned} \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \quad (2.1.9)$$

- (3) D 型分枝 (D-type of branching or pitch fork bifurcation) 系に対称性がみられる場合、特性乗数の1つが0となるパラメータ値において、平衡点の枝分かれが起こる。

$$\begin{aligned} {}_k O &\leftrightarrow {}_{k+1} O + 2{}_k O \\ {}_k O + 2{}_{k+1} O &\leftrightarrow {}_{k+1} O \end{aligned} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.1.10)$$

2.2 周期解の分岐

式 (2.1.1), (2.1.2) において, $t = 0$ で初期値 x_0 を出発する解を $x(t) = \varphi(t, x_0, \lambda)$ とおく。自律系と非自律系の場合にわけてそれぞれポアンカレ写像を定義する。

自律系 (2.1.1) においては周期解 $\varphi(t, x_0, \lambda)$ に対して, n 次元多様体で横断的に交わる局所断面 Π をとり, その局所座標を h とする:

$$\Pi = \{x \in R^{n+1} \mid q(x) = 0, q: R^{n+1} \rightarrow R\} \quad (2.2.1)$$

$$h: \Pi \rightarrow \Sigma \subset R^n \quad (2.2.2)$$

このとき, 点 $u_0 = h(x_0) \in \Sigma$ の近傍の点 $u_1 \in \Sigma$ に対して, $h^{-1}(u_1) = x_1 \in \Pi$ を出発する解は再び Π と交わる。その時刻を $L(x_1)$ とすれば局所座標 Σ 上のポアンカレ写像:

$$\begin{aligned} T_\lambda &: \Sigma \rightarrow \Sigma \\ u_1 &\mapsto u_2 = h(\varphi(L(h^{-1}(u_1)), h^{-1}(u_1), \lambda)) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

が定義できる。

非自律系 (2.1.2) においては, 系の周期性 (2.1.3) を用いてポアンカレ写像を定義できる。

$$\begin{aligned} T_\lambda &: R^n \rightarrow R^n \\ x_0 &\mapsto T_\lambda(x_0) = \varphi(\tau, x, \lambda) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

このようにして, 式 (2.1.1) (2.1.2) の周期 $m\tau$ の周期解には T_λ^m の固定点に対応する。すなわち, 自律系と非自律系の周期解の解析は統一的に, ポアンカレ写像の固定点に関する解析に帰着できることになる。以下, T_λ の固定点の分岐について考える。 m 周期点に関しても同様の議論ができる。

点 $u \in R^n$ を T_λ の固定点とする:

$$u - T_\lambda(u) = 0 \quad (2.2.5)$$

また, この固定点に関する特性方程式を

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_n - DT_\lambda(u)) = 0 \quad (2.2.6)$$

とする。双曲型固定点 u は式 (2.2.6) の根すなわち特性乗数により分類できる。この分類は位相的性質を反映しており, 固定点の分岐はこの分類による固定点の性質が変化する場合に生じる [7]。

記号 ${}_k D, {}_k I$ によって不安定次元が k 次元の固定点を表すことにする。D 型固定点は $\mu < -1$ となる特性乗数の個数が偶数, I 型固定点は奇数であることを表す。ポアンカレ写像が n 次元の場合, 位相的に異なる固定点は ${}_k D (k = 0, 1, \dots, n), {}_k I (k = 1, \dots, n-1)$ の $2n$ 個ある。

2.2.1 余次元1の分岐

平衡点の場合と同様に位相的性質の変化するパラメータ値において分岐が生じる。一般的な余次元1の分岐としては以下の3つが知られている。

- (1) 接線分岐 (tangent bifurcation) $\mu = 1$ で起こり, 固定点对が発生・消滅する。

$$\begin{aligned} \phi &\leftrightarrow {}_{k+1} D + {}_k D \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \\ \phi &\leftrightarrow {}_{k+1} I + {}_k I \quad (k = 1, 2, \dots, n-2) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

- (2) 周期倍分岐 (period-doubling bifurcation) $\mu = -1$ で起こり周期が倍になる。

$$\begin{aligned} {}_k D &\leftrightarrow {}_{k+1} I + 2{}_k D^2 \\ {}_k D + 2{}_{k+1} D^2 &\leftrightarrow {}_{k+1} I \end{aligned} \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} {}_k D &\leftrightarrow {}_{k-1} I + 2{}_k D^2 \\ {}_k D + 2{}_{k-1} D^2 &\leftrightarrow {}_{k-1} I \end{aligned} \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (2.2.9)$$

- (3) Neimark-Sacker 分岐 特性乗数 μ が複素平面の単位円上で起こり, 準周期解 (ポアンカレ写像における不変閉曲線: ICC) が発生・消滅する。

$$\begin{aligned} {}_k D &\leftrightarrow {}_{k+2} D + ICC \\ {}_k D + ICC &\leftrightarrow {}_{k+2} D \end{aligned} \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \quad (2.2.10)$$

2.2.2 余次元2の分岐

周期解の余次元2の分岐としては次の2種類が存在する。

- (1) D 型分枝 (D-type of branching) 系に対称性が存在する場合, $\mu = 1$ において起こる。すなわち接線分岐の退化した場合である。周期点が枝分かれする。

$$\begin{aligned} {}_k D &\leftrightarrow {}_{k+1} D + 2{}_k D \\ {}_k D + 2{}_{k+1} D &\leftrightarrow {}_{k+1} D \end{aligned} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.2.11)$$

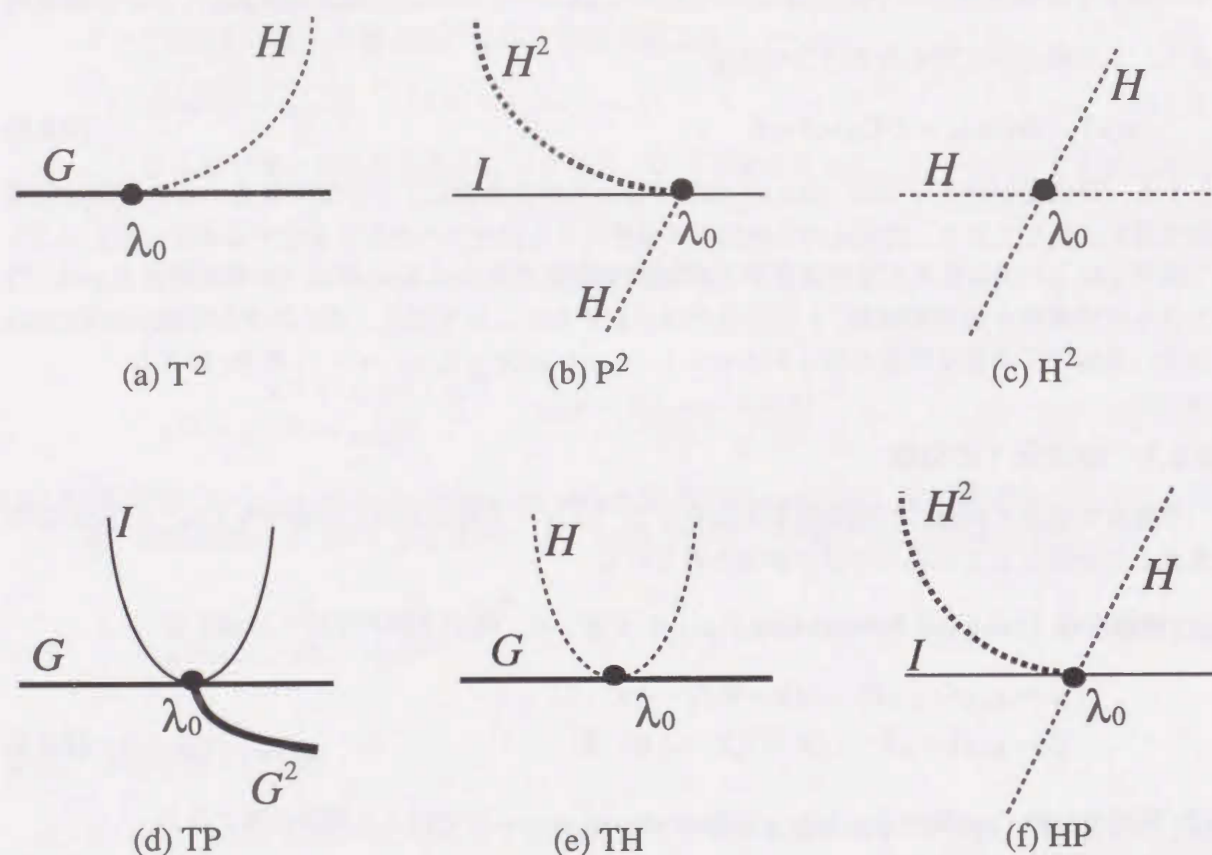


図 2.2.1: 余次元2の分岐.

$$\begin{aligned} kI &\leftrightarrow k_{+1}I + 2_kI \\ kI + 2_{k+1}I &\leftrightarrow k_{+1}I \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n-2) \quad (2.2.12)$$

(2) 余次元1の分岐点の交わり 2.2.1節に示した余次元1の分岐条件が重複することにより, 余次元2の分岐が起こる. 文献[5]に示された6種類の余次元2の分岐を図2.2.1に示す.

- (a) 2つの T 分岐条件の重複 (T^2 分岐)
- (b) 2つの P 分岐条件の重複 (P^2 分岐)
- (c) 2つの H 分岐条件の重複 (H^2 分岐)
- (d) T 分岐条件と P 分岐条件の重複 (TP 分岐)
- (e) T 分岐条件と H 分岐条件の重複 (TH 分岐)
- (f) H 分岐条件と P 分岐条件の重複 (HP 分岐)

第3章

2個結合した発振器系の解析

3.1 まえがき

結合発振器の解析において, 系に存在する対称性を用いることにより発振パターンや分岐メカニズムの解明が行われている[8,9]. Papyらは平衡点と周期解について対称性による分類を行い, それぞれの可能な分岐を示した[10,11]. ハイブリッド結合を扱っているために, 平衡点(原点)のHopf分岐より同相, 逆相発振が一度に発生する. これらは退化した分岐となるために, 分岐集合は少なくなり発振パターンは多く得らるが, 分岐現象は大変複雑となる.

本章では最もシンプルな電圧結合系を扱うことにより, ハイブリッド結合系や高次元系でみられる複雑な分岐現象の基礎的研究を行う. 実際に高次元系においてある種の対称性をもつ周期解は, 次元を落とした系を解析することにより求まることが報告されている[12].

はじめに対称性による平衡点と周期解の分類を行う. 次に分岐集合を求め, 強い対称性をもつ平衡点・周期解が対称性破壊分岐により, 弱い対称性をもつ平衡点・周期解へと遷移する様子を示す. このことは対称性の弱い解は, 対称性の強い解の分岐を考えることにより, 存在領域を示すことが可能であることを意味する. 周期解のみに関わらず, カオス振動も同様に求めることが可能であり, 対称性のないカオス振動領域を示す. 最後に得られた結果をまとめて, 2個の電圧結合系にみられる全ての平衡点と周期解が, どのような分岐を経て, どのような対称性をもつ平衡点と周期解へ遷移することが可能であるのかを示す.

3.2 単体の発振器の分岐

3, 4章において結合発振器の解析を行うが, 結合する発振器はBVP (Bonhöffer-van der Pol) 発振器(またはFitzHugh-Nagumo発振器)を用いる. このモデルはFitzHughにより, ヤリイカの神経軸索の電気特性を記述する実験式として導出された4階の常微分方程式で記述されるHodgkin-Huxley方程式を, 2階の常微分方程式に簡略化することにより得られた. またNagumoらによってトンネルダイオードを用いた電子回路モデルが提案され, ダイオードの非線形特性を3次多項式で近似するとBVPモデルと同じものになることが示された[13].

BVP 発振器の回路方程式は次式で記述される：

$$C \frac{dv}{dt} = -g(v) - i, \quad L \frac{di}{dt} = v - ri \quad (3.2.1)$$

ここで非線形関数 $g(v)$ は

$$g(v) = -a_1 v + a_3 v^3 \quad (3.2.2)$$

と仮定した。変数変換とパラメータの置き換え：

$$x = \sqrt{L}i, \quad y = \sqrt{C}v, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \epsilon = \frac{a_1}{C}, \quad \beta = \frac{a_3}{a_1 C}, \quad \sigma = \frac{r}{L} \quad (3.2.3)$$

を行なうことにより式 (3.2.1) は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega y - \sigma x \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega x + \epsilon(1 - \beta y^2)y \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

以下に示す計算においてはパラメータ ω, β を任意変数としたが、分岐図を描くときは $\omega = 1.0$, $\beta = 1.0$ に固定した。式 (3.2.4) において、平衡点として次の2種類が存在する。

$$(1) \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (3.2.5)$$

$$(2) \quad x = \pm \frac{\omega}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma \epsilon}\right)}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma \epsilon}\right)} \quad (3.2.6)$$

ヤコビ行列を式 (3.2.7) に示す。

$$J = \begin{bmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & \epsilon(1 - 3\beta y_*^2) \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

y_* は平衡点の座標 (式 (3.2.5) または (3.2.6)) を表す。行列 (3.2.7) の固有値により、分岐の起こるパラメータ値が求まり、その結果を表 3.2.1 にまとめる。

表 3.2.1: BVP 発振器の分岐の条件。

分岐	D 型分枝	Hopf 分岐
平衡点		
タイプ (1)(原点)	$\epsilon = \frac{\omega^2}{\sigma}$	$\epsilon = \sigma$
タイプ (2)	$\epsilon = \frac{\omega^2}{\sigma}$	$\epsilon = \frac{1.5\omega^2}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$

表 3.2.1 より、 $\epsilon = \omega^2/\sigma$ の D 型分枝においてタイプ (1) の平衡点 (原点) より 2つの平衡点 (タイプ (2), 式 (3.2.6)) が発生することがわかる。

(σ, ϵ) パラメータ平面での分岐図を図 3.2.1 に示す。発振領域は \square である。領域 \square では安定な平衡点が1つのみ存在する。 σ を減少させ Hopf 分岐 h_1 を横切ると平衡点は完全不安定となり、その周りに安定なリミット・サイクルが発生する (図 3.2.2 (1))。次に領域 (1) から ϵ を増加させ D 型分枝 d を通過すると、完全不安定だった平衡点がサドルとなり、その周り

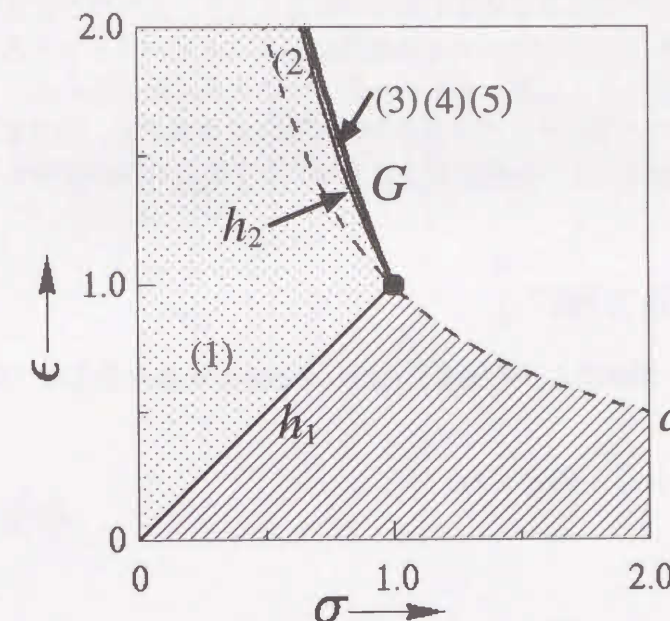


図 3.2.1: BVP 発振器の分岐図。点線 d は平衡点の D 型分枝, 細い実線 h_1, h_2 は平衡点の Hopf 分岐, 太い実線 G はリミット・サイクルの接線分岐を表す。

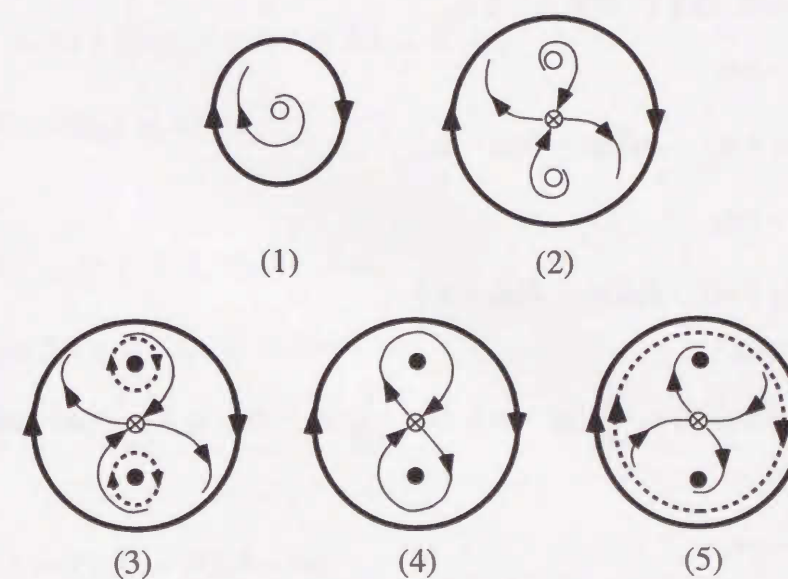


図 3.2.2: 図 3.2.1 の各領域での相平面図。白丸は完全不安定, 黒丸は完全安定, \otimes はサドル平衡点をそれぞれ示す。点線, 太い実線はそれぞれ不安定, 安定なリミット・サイクルを表す。(5) における安定なリミット・サイクルと不安定リミット・サイクルが図 3.2.1 中の G により消滅する。

に2つの完全不安定な平衡点が発生する(図3.2.2(2)). さらに ϵ を増加させHopf分岐 h_2 を横切ることにより, 2つの完全不安定な平衡点が安定となり, 2つの不安定なリミット・サイクルが発生する(図3.2.2(3)). パラメータの微小変化によりセパトリクス・ループが生じ(図3.2.2(4)), 2つの小さいリミット・サイクルが1つになる(図3.2.2(5)) [14]. 接線分岐集合 G により安定・不安定なリミット・サイクルが対になって消滅する. 図3.2.1において白い領域では, 2つの安定な平衡点と1つの不安定(サドル)な平衡点のみが存在する.

3.3 結合系の回路方程式

BVP発振器を2個, 抵抗により電圧端子どうしを結合した系を考える(図3.3.1). 回路方程式は次式で表される.

$$\begin{aligned} C \frac{dv_1}{dt} &= -g(v_1) - i_1 - G(v_1 - v_2) \\ L \frac{di_1}{dt} &= v_1 - ri_1 \\ C \frac{dv_2}{dt} &= -g(v_2) - i_2 - G(v_2 - v_1) \\ L \frac{di_2}{dt} &= v_2 - ri_2 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

式(3.2.3)の変換と次式の変数変換とパラメータの置き換え:

$$x_k = \sqrt{L}i_k, \quad y_k = \sqrt{C}v_k \quad (k=1, 2), \quad \delta = \frac{G}{C} \quad (3.3.2)$$

を行なうことにより式(3.3.1)は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \omega y_1 - \sigma x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\omega x_1 + \epsilon(1 - \beta y_1^2)y_1 - \delta(y_1 - y_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \omega y_2 - \sigma x_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\omega x_2 + \epsilon(1 - \beta y_2^2)y_2 - \delta(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

式(3.3.3)に座標変換:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \quad s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2), \quad r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \quad s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) \quad (3.3.4)$$

を行い, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= \omega s_1 - \sigma r_1 \\ \frac{ds_1}{dt} &= -\omega r_1 + \epsilon \left(1 - \frac{\beta}{2}(s_1^2 + 3s_2^2)\right) s_1 \\ \frac{dr_2}{dt} &= \omega s_2 - \sigma r_2 \\ \frac{ds_2}{dt} &= -\omega r_2 + \epsilon \left(1 - \frac{\beta}{2}(s_2^2 + 3s_1^2)\right) s_2 - 2\delta s_2 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

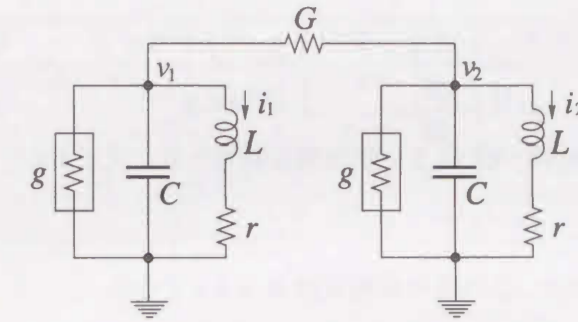


図3.3.1: 抵抗で電圧ポートを用いて結合した発振器回路.

3.4 対称性の定義

【方程式】

系を記述する方程式が

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) \quad (3.4.1)$$

で与えられ,

$$f(Px, \lambda) = Pf(x, \lambda) \quad (3.4.2)$$

を満たすとき, 式(3.4.1)を P 対称方程式とよぶ [15].

【平衡点】

P 対称方程式の平衡点 e_0 が

$$Pe_0 = e_0 \quad (3.4.3)$$

を満足するとき, e_0 を P 不変平衡点とよぶ.

【周期解】

初期値 x_0 を出発する式(3.4.1)の解を

$$x(t) = \varphi(x_0, t) \quad (3.4.4)$$

とおくと,

$$P\varphi(x, t) = \varphi(Px, t) = \varphi(x, t - \tau_P) \quad (3.4.5)$$

を満足するとき, (P, τ_P) 対称周期解とよぶ. 周期解の周期を L とすると $\varphi(x_0, t - \tau)$ は元の周期解 $\varphi(x_0, t)$ より, 位相が

$$\phi = 2\pi \frac{\tau}{L} \quad (3.4.6)$$

遅れた解を表している.

次に式(3.3.5)のもつ対称性について考える. 式(3.4.2)をみたす行列(対称操作)は以下の4つが存在する.

$$I_4 = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & I_2 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & \bar{I}_2 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} \bar{I}_2 & O \\ O & I_2 \end{bmatrix}, \bar{I}_4 = -I_4 = \begin{bmatrix} \bar{I}_2 & O \\ O & \bar{I}_2 \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

ここで I_2 は 2×2 の単位行列, O は 2×2 の零行列である. 式(3.4.7)の集合

$$\Gamma = \{I_4, \sigma_1, \sigma_2, \bar{I}_4\} \quad (3.4.8)$$

は行列の積に関して群をなす. この群の乗積表は表3.4.1となる.

表 3.4.1: 群 Γ の乗積表.

	I_4	σ_1	σ_2	\bar{I}_4
I_4	I_4	σ_1	σ_2	\bar{I}_4
σ_1	σ_1	I_4	\bar{I}_4	σ_2
σ_2	σ_2	\bar{I}_4	I_4	σ_1
\bar{I}_4	\bar{I}_4	σ_2	σ_1	I_4

群の乗積表からわかるように, Γ は次の部分群(等方化部分群, isotropy sub-group)をもつ:

$$\Sigma_1 = \{I_4, \sigma_1\}, \Sigma_2 = \{I_4, \sigma_2\}, \Sigma_3 = \{I_4, \bar{I}_4\} \quad (3.4.9)$$

部分群 Σ に対して

$$Fix(\Sigma) = \{x \in R^4 | gx = x, g \in \Sigma\} \quad (3.4.10)$$

を Σ 不変部分空間という. 式(3.3.5)では

$$Fix(\Sigma_1) = \{x \in R^4 | x = [r_1 \ s_1 \ 0 \ 0]^T\} \quad (3.4.11)$$

$$Fix(\Sigma_2) = \{x \in R^4 | x = [0 \ 0 \ r_2 \ s_2]^T\} \quad (3.4.12)$$

$$Fix(\Sigma_3) = \{x \in R^4 | x = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T\} \quad (3.4.13)$$

である. 従って,

$$\dim(Fix(\Sigma_1)) = 2, \dim(Fix(\Sigma_2)) = 2, \dim(Fix(\Sigma_3)) = 0 \quad (3.4.14)$$

となっている. これらの対称性は自律系のみならず, 非自律系においても用いることができる[16,17].

3.5 平衡点と周期解の分類

式(3.3.5)において, 対称性により平衡点を分類すると表3.5.1に示す4種類を得る. それらを $(r_1, s_1), (r_2, s_2)$ 座標上に示したので図3.5.1である. 原点(●)は式(3.4.7)の全ての操作に対して, 座標が不変であるので完全対称平衡点とよぶ. 同様に平衡点■と▲は I_4 を除くと, 操作

表 3.5.1: 対称性による平衡点の分類.

平衡点の名称	等方化部分群	個数	記号	(発振器1, 発振器2)
完全対称(0)	$\Gamma = \{I_4, \sigma_1, \sigma_2, \bar{I}_4\}$	1	●	(0, 0)
σ_1 不変(1)	$\Sigma_1 = \{I_4, \sigma_1\}$	2	■	(a, a)
σ_2 不変(2)	$\Sigma_2 = \{I_4, \sigma_2\}$	2	▲	(a, -a)
対称性なし	$\{I_4\}$	4	×	(a, b)

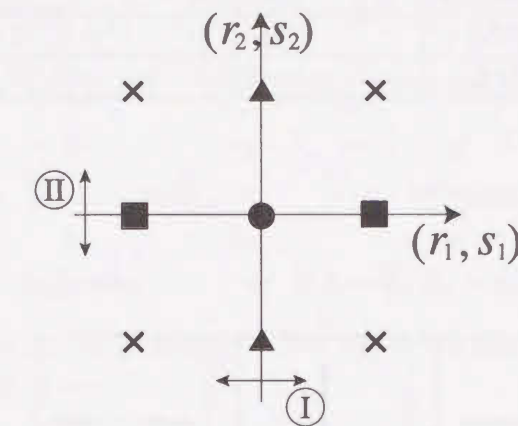


図 3.5.1: 対称性による平衡点の分類. 記号は表3.5.1参照. r_i と s_i の2次元を1つの軸で表している. (r_i, s_i) 軸は Σ_i 不変部分空間を表す ($i=1,2$).

σ_1 と σ_2 により不変となるので, それぞれ σ_1 不変, σ_2 不変平衡点とよぶ. 平衡点×は I_4 のみしか対称操作をもたないので, 対称性なし平衡点となる. 対称性をもたない平衡点は1個みつければ, 操作 $\sigma_1, \sigma_2, \bar{I}_4$ により4個の平衡点が存在する.

式(3.4.5)の対称性の定義に基づき, 式(3.3.5)に存在する周期解を分類すると表3.5.2を得る. 反転対称($\bar{I}_4, L/2$)をもたない周期解(対称性なしは除く)には“ずれた”という単語を用いた. 従って“ずれた同相”とは原点からずれた位置で, 互いの発振器が同相同期している状態である. 平衡点の場合と同様に周期解の対称性が弱くなるに従い, その個数は増加する. 各周期解の (r_1, r_2) 平面での軌道の模式図を図3.5.2に示す.

表 3.5.2: 対称性による周期解の分類

名称	対称性	個数
完全同相	$(\sigma_1, 0), (\sigma_2, L/2), (\bar{I}_4, L/2)$	1
完全逆相	$(\sigma_2, 0), (\sigma_1, L/2), (\bar{I}_4, L/2)$	1
ずれた同相	$(\sigma_1, 0)$	2
ずれた逆相	$(\sigma_2, 0)$	2
ずれたほぼ同相	$(\sigma_2, L/2)$	2
ずれたほぼ逆相	$(\sigma_1, L/2)$	2
反転対称	$(\bar{I}_4, L/2)$	2
対称性なし	なし	4

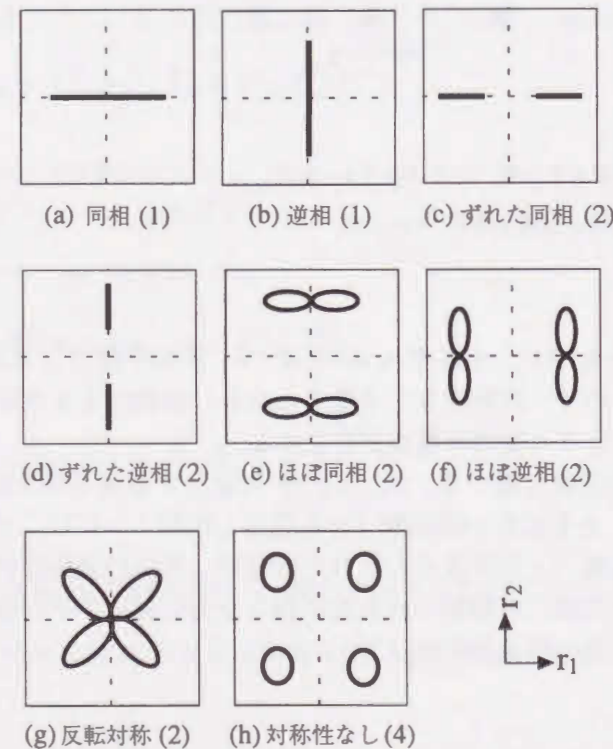


図 3.5.2: 対称性による周期解の分類. 各名称の横の括弧のなかの数字は, 対称性により得られる周期解の個数を表す.

3.6 平衡点の分岐

それぞれの平衡点の座標を求めると, 以下のようになる. ここでは s_1, s_2 のみの座標を示し $r_1 = \omega s_1 / \sigma, r_2 = \omega s_2 / \sigma$ である.

$$\text{完全対称} : s_1 = 0, s_2 = 0 \quad (\text{原点})$$

$$\sigma_1 \text{ 不変} : s_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta} \left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma \epsilon}\right)}, s_2 = 0$$

$$\sigma_2 \text{ 不変} : s_1 = 0, s_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{\epsilon \beta} \left(\epsilon - \frac{\omega^2}{\sigma} - 2\delta\right)}$$

$$\text{対称性なし} : s_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2\beta} \left(1 - \frac{3\delta}{\epsilon} - \frac{\omega^2}{\epsilon \sigma}\right)}, s_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2\beta} \left(1 + \frac{\delta}{\epsilon} - \frac{\omega^2}{\epsilon \sigma}\right)}$$

各平衡点を $(r_{10}, s_{10}, r_{20}, s_{20})$ とおき, ヤコビ行列を求めると式 (3.6.1) となる.

$$J = \begin{bmatrix} -\sigma & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \epsilon \left(1 - \frac{3\beta}{2}(s_{10}^2 + s_{20}^2)\right) & 0 & -3\epsilon\beta s_{10}s_{20} \\ 0 & 0 & -\sigma & \omega \\ 0 & -3\epsilon\beta s_{10}s_{20} & -\omega & \epsilon \left(1 - \frac{3\beta}{2}(s_{10}^2 + s_{20}^2)\right) - 2\delta \end{bmatrix} \quad (3.6.1)$$

対称性のない平衡点以外は, ヤコビ行列がブロック対角化されるので, それらの分岐の条件を求めた. なお式 (3.3.5) において

$$\sigma = 0.8, \beta = 1.0, \omega = 1.0 \quad (3.6.2)$$

と固定し, (δ, ϵ) 平面での分岐を考えた. 計算した結果を図 3.6.1 に示す.

図 3.6.1 において d, h の左下添字は, 分岐を起こす平衡点を示し, 表 3.5.1 の平衡点の名称の横の数字に対応する. 右下添字は分岐する方向を示し, 図 3.5.1 中の①, ②の方向を表す. ○は Hopf 分岐集合どうしの交わりによる余次元 2 の分岐, ◇は D 型分枝集合と Hopf 分岐集合の交わりによる余次元 3 の分岐, □は D 型分枝どうしの交わりによる余次元 4 の分岐を表す. 領域 \square/\square , \square/\square , \square/\square ではそれぞれ完全対称, σ_1 不変, σ_2 不変平衡点が安定に存在する.

比較のために電流結合とハイブリッド結合した場合の平衡点の分岐図を図 3.6.2 と図 3.6.3 に示す. δ が正の領域で考えると, 電圧結合では領域 \square/\square から ϵ を増加させることにより, Hopf $0h_1$ を横切り, 安定な完全同相解が得られる. 電流結合 (図 3.6.2) では $0h_2$ を横切ることにより, 安定な完全逆相解が得られる. ハイブリッド結合 (図 3.6.3) においては, $0h_1$ が重複した Hopf 分岐条件となるために, 完全同相解と完全逆相解が同時に得られる.

以後, 図 3.6.1 の分岐図を詳しくみていく. はじめに ① の近傍での平衡点の分岐と安定性の関係を述べた後, 3.7 節で ◇, ③, ④, ⑤ 近傍での周期解の分岐も含めた詳しい解析結果を報告する.

図 3.6.1 より ① 付近での平衡点の D 型分枝集合 (点線) のみを抜き出した図を図 3.6.4 に示す. 曲線 l に沿ってパラメータを変化させたときの, 平衡点の発生と不安定次元の変化を図 3.6.5 に示す. 図 3.6.5 においては, ①, ②, ⑤, ⑥ から上にのびる枝だけを示し, 下側は同じであるので省略した. 従って, パラメータ全平面で完全対称平衡点が 1 個, ①~⑤間で σ_2 不変平衡点が 2 個, ②~⑥間で σ_1 不変平衡点が 2 個, ③~④間で対称性なし平衡点が 4 個存在することがわかる. 最大で 9 個の平衡点が ③~④間で存在する. 完全対称平衡点はすでに Hopf 分岐を 2 つ起

こすことにより, 完全不安定 (40) となっているので, 図 3.6.4 の D 型分枝により発生する平衡点は全て不安定となる.

以上, 平衡点の D 型分枝により発生する平衡点のもつ対称性と, Hopf 分岐により発生する周期解のもつ対称性を表 3.6.1, 3.6.2 にまとめる.

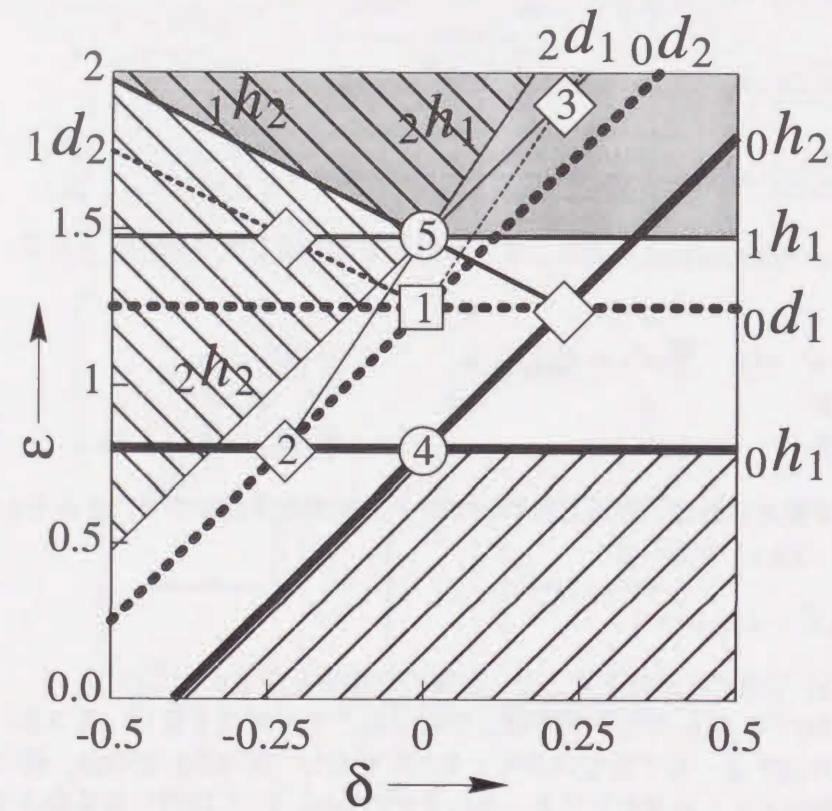


図 3.6.1: 各平衡点の分岐図 (電圧結合). h (実線), d (点線) はそれぞれ Hopf 分岐, D 型分枝集合を表す.

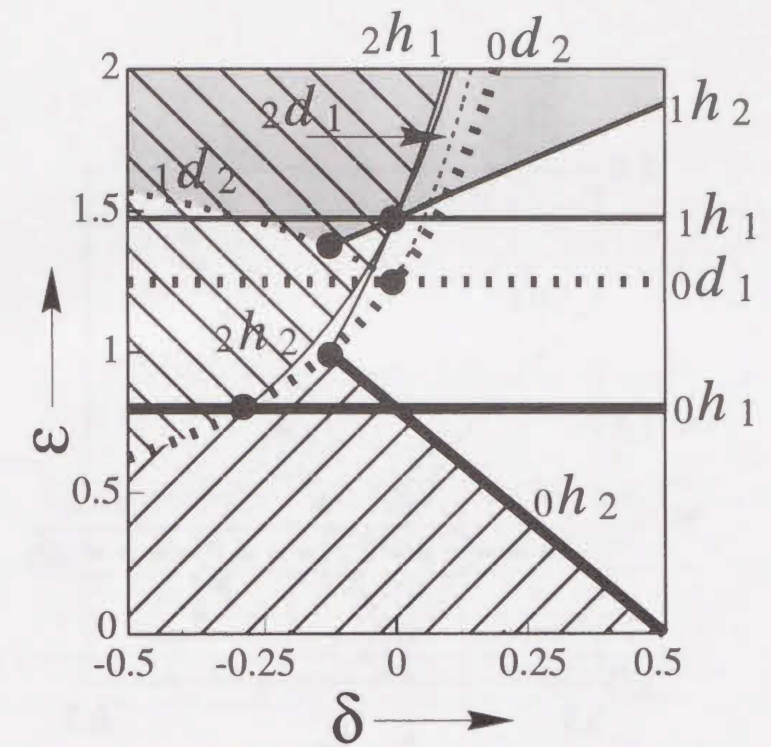


図 3.6.2: 電流結合した場合の各平衡点の分岐図.

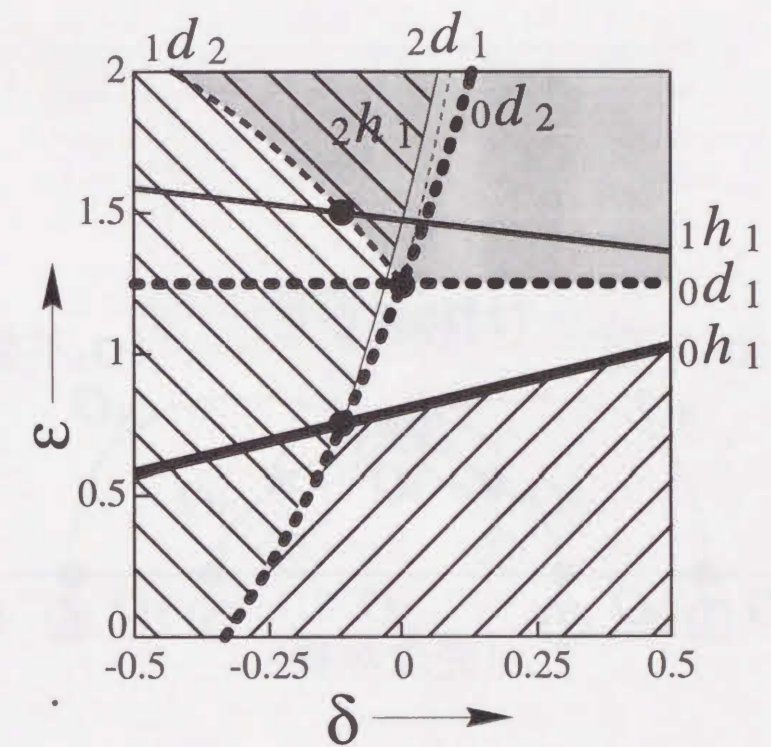


図 3.6.3: ハイブリッド結合した場合の各平衡点の分岐図.

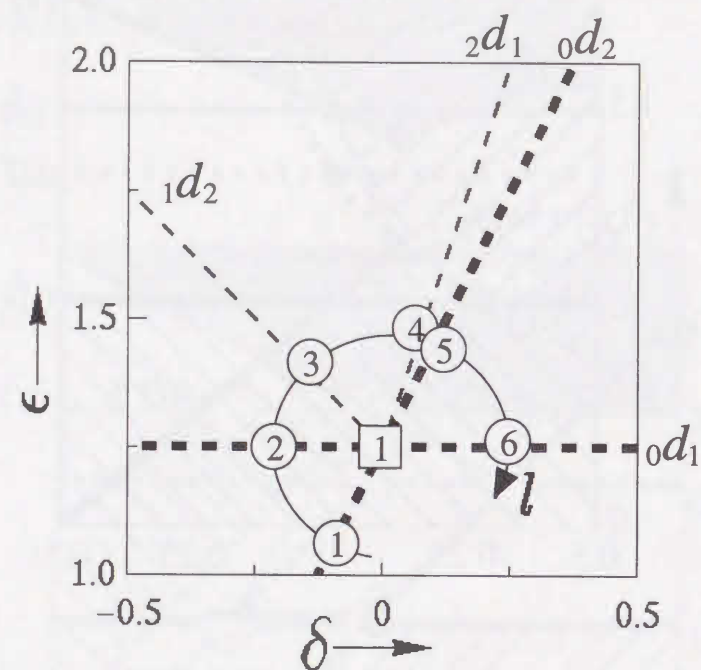


図 3.6.4: D 型分枝集合どうしの交わり点付近での分岐図.

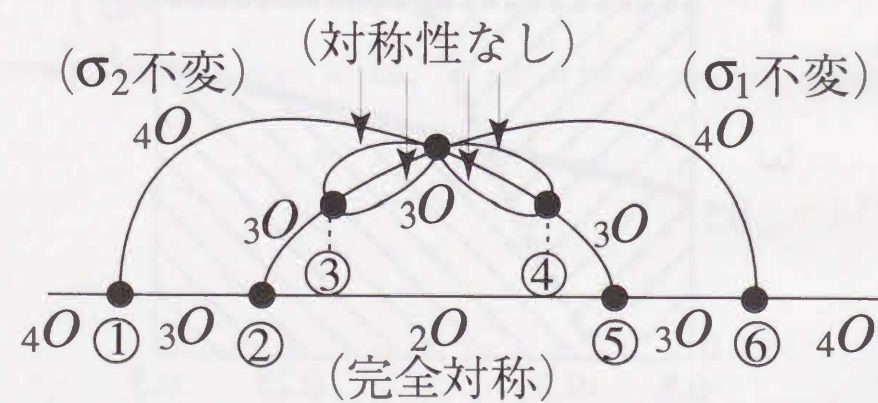
図 3.6.5: 図 3.6.4 中の曲線 l に沿った分岐図.

表 3.6.1: 図 3.6.1 の D 型分枝により発生する平衡点.

図 3.6.1 中の記号	元の平衡点	発生する平衡点
$0d_1$	完全対称	σ_1 不変
$0d_2$	完全対称	σ_2 不変
$1d_2$	σ_1 不変	対称性なし
$2d_1$	σ_2 不変	対称性なし

表 3.6.2: 図 3.6.1 の Hopf 分岐により発生する周期解.

図 3.6.1 中の記号	元の平衡点	発生する周期解
$0h_1$	完全対称	完全同相
$0h_2$	完全対称	完全逆相
$1h_1$	σ_1 不変	ずれた同相
$1h_2$	σ_1 不変	ずれたほぼ逆相
$2h_1$	σ_2 不変	ずれたほぼ同相
$2h_2$	σ_2 不変	ずれた逆相

3.7 周期解の分岐

図 3.7.1 に図 3.6.1 の完全対称平衡点 (原点) の D 型分枝集合 ${}_0d_2$ と Hopf 分枝集合 ${}_0h_1$ が交わる点 (◇) 付近での詳しい分岐図を示す。図 3.7.1 の曲線 l に沿ってパラメータを変化させた場合の、周期解と平衡点の不安定次元の変化と、分岐を起こす各周期解と平衡点のもつ対称性を図 3.7.2 に示す。完全同相解の D 型分枝 D_3 (③) により発生した“ずれたほぼ同相”が Neimark-Sacker 分岐 N を起こし (④), σ_2 不変平衡点の Hopf 分岐 ${}_2h_1$ (⑤) により消滅する。

図 3.6.1 の σ_2 不変平衡点の D 型分枝集合 ${}_2d_1$ と Hopf 分枝集合 ${}_2h_2$ が交わる点 (◇) 付近での詳しい分岐図を図 3.7.3 に示す。小さいパラメータ領域に多くの分岐集合が存在し、非常に複雑となるので模式図を用いた。図 3.7.3 の曲線 l に沿ってパラメータを変化させた場合の、周期解と平衡点の不安定次元の変化と、分岐を起こす各周期解と平衡点のもつ対称性を図 3.7.4 に示す。接線分枝集合 G_4 が生じ、対称性なしの周期解が折り曲げられているが、主な分岐構造は図 3.7.2 の場合と同じである。対称性なしの周期解が ⑥ において、Neimark-Sacker 分岐 N_2 を起こすことにより不安定な準周期解が発生する。

図 3.6.1 において、 ${}_0d_1$ と ${}_0h_2$ および ${}_1d_2$ と ${}_1h_1$ が交わる点 (◇) においても、同様の分岐構造が存在することが予想される。

図 3.6.1 中の完全対称平衡点 (原点) の Hopf 分枝集合 ${}_0h_1$ と ${}_0h_2$ が交わる点 (④) 付近での詳しい分岐図を図 3.7.5 に示す。影をつけた領域 \square で完全対称平衡点 (原点) が安定に存在する。その領域からパラメータ ϵ を増加させ、 ${}_0h_1$ を横切ることにより、原点から図 3.5.1 の ① 方向に Hopf を起こし安定な同相発振が得られる。領域 \square からパラメータ δ を減少させ、 ${}_0h_2$ を横切ることにより、図 3.5.1 の ⑩ 方向に Hopf を起こし安定な逆相発振が得られる。図 3.7.5 の曲線 l に沿ってパラメータを変化させた場合の周期解と平衡点の不安定次元の変化を図 3.7.6 に示す。②, ⑦ で発生した完全同相解と①, ⑥で発生した完全逆相解はそれぞれ D_1 (③) と D_2 (⑤) で D 型分枝を起こし、反転対称解を生ずる。 $\delta = 0$ 上 (④) ではちょうどカスプを横切るかたちとなるので、分岐は起こらないが不安定次元が1つ変化する。この現象を詳しく観察するために対称性を崩した次のシステムを考える：

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \omega y_1 - \sigma x_1 + J \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\omega x_1 + \epsilon(1 - \beta y_1^2)y_1 - \delta(y_1 - y_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \omega y_2 - \sigma x_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\omega x_2 + \epsilon(1 - \beta y_2^2)y_2 - \delta(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

パラメータ (δ, J) 上での分岐図を図 3.7.7 に示す。影をつけた領域で完全同相、完全逆相解に対応する周期解が存在する (J を少しでも注入すると完全同相、完全逆相解は存在しない)。 $J = 0$, $\delta = 0$ では4つの接線分枝集合が交わることにより、2つのカスプ点の接点となる。ちょうどこの点を横切るように矢印に沿ってパラメータを変化させると、分岐は起こらないが安定性のみが変化することがわかる。すなわち図 3.7.5 の $\delta = 0$ 上では非常に退化した現象が起こることがわかる。

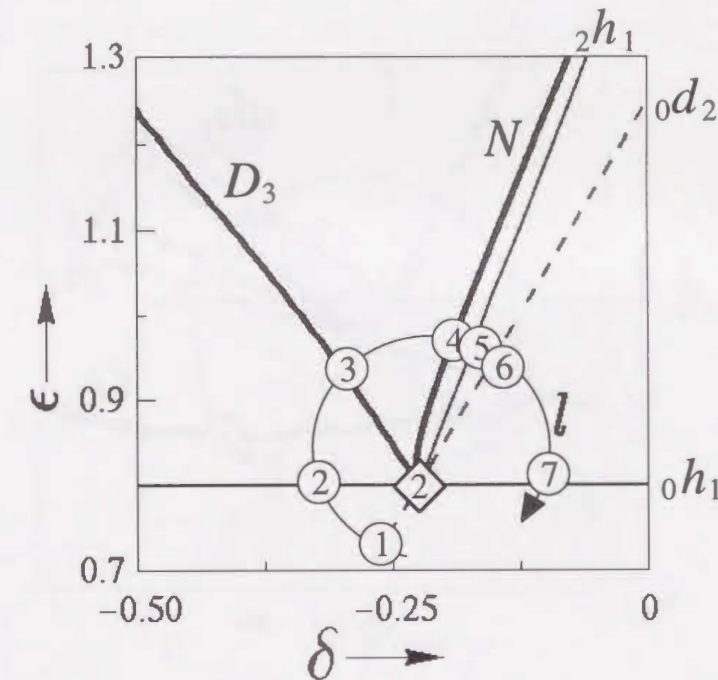


図 3.7.1: D 型分枝集合と Hopf 分枝集合の交わり点 (図 3.6.1 中の ◇) 付近での分岐図。 N は Neimark-Sacker 分岐を表す。

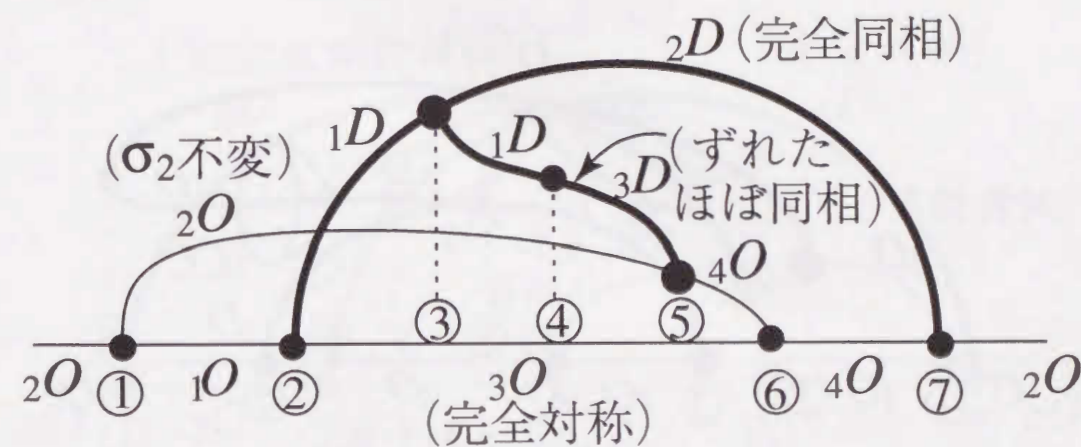


図 3.7.2: 図 3.7.1 中の曲線 l に沿った分岐図。太い線は周期解 (D)、細い線は平衡点 (O) を表し、 D, O の添字は不安定次元を示す。

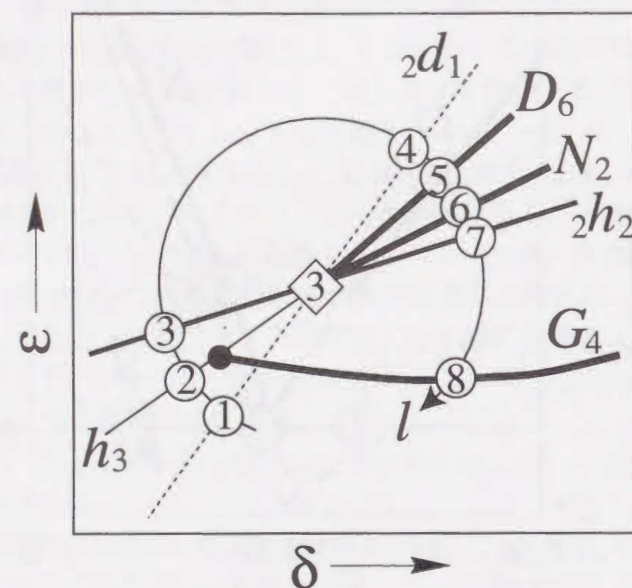


図 3.7.3: D 型分枝集合と Hopf 分岐集合の交わり点 (図 3.6.1 中の \diamond) 付近での分岐図 (模式図).

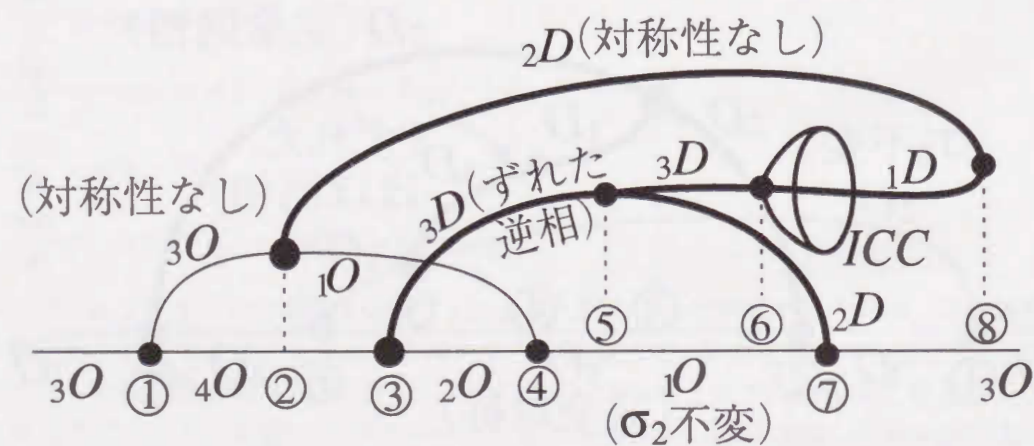


図 3.7.4: 図 3.7.3 中の曲線 l に沿った分岐図.

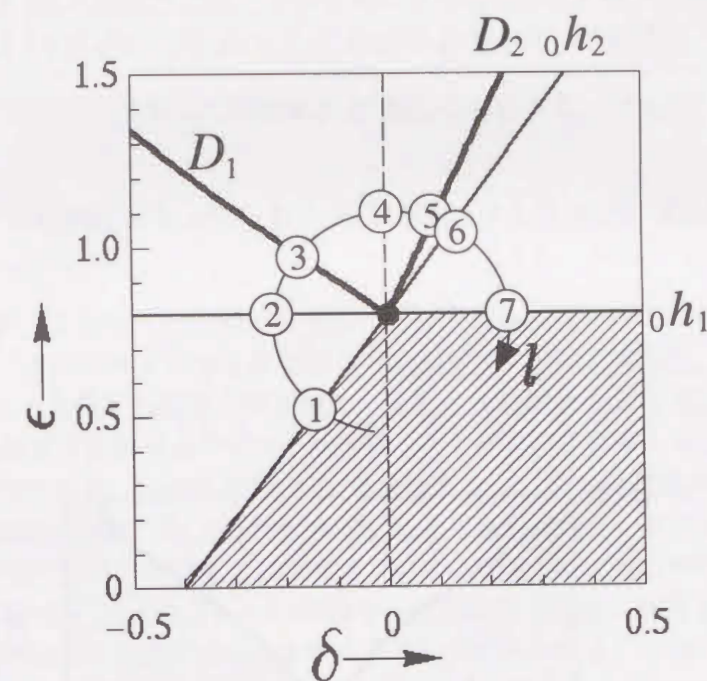
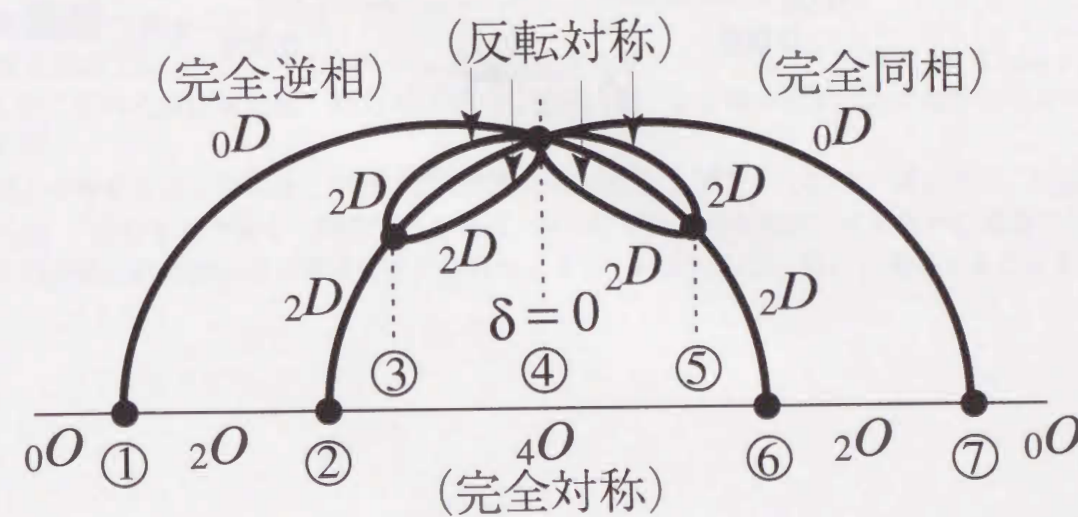


図 3.7.5: Hopf 分岐集合どうしの交わり点 (図 3.6.1 中の ④) 付近での周期解 (太い線) と平衡点 (細い線) の分岐図. D は周期解の D 型分岐集合を表す.



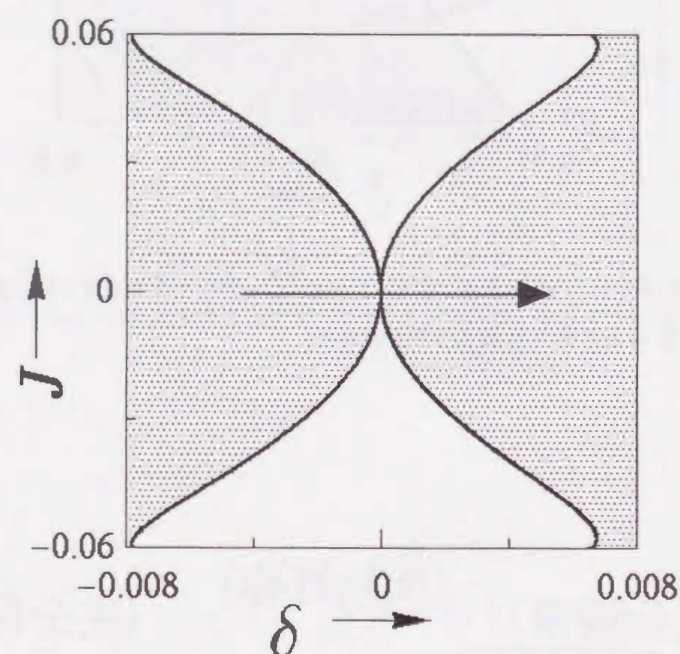


図 3.7.7: 式 (3.7.1) の接線分岐集合.

図 3.7.8 に, σ_2 不変平衡点の Hopf 分岐集合どうしの交わり点 (図 3.6.1 ⑤) 付近での詳しい分岐図を示す. 図 3.7.8 の曲線 l に沿ってパラメータを変化させた場合の周期解と平衡点の不安定次元の変化を図 3.7.9 に示す. 図 3.7.6 と図 3.7.9 を比較して, 分岐構造:

- 1つの Hopf 分岐より発生した周期解が D 型分岐を起こし, 対称性の崩れた周期解を発生する.
- その発生した周期解はもう 1つの Hopf 分岐集合により発生した周期解の D 型分岐により消滅する.

は全く同じであるが, 安定性と対称性が異なることがわかる.

図 3.7.10 に図 3.7.5 のパラメータ ϵ を増加させた領域での分岐図を示す. $0h_1$ により発生した完全同相解と $0h_2$ により発生した完全逆相解は, それぞれ接線分岐集合 G_1 と G_2 により消滅する [9]. 対となって消滅する相手は“ずれた同相解”と“ずれた逆相解”のセパトリクス・ループにより生じたものである. 完全同相解の D 型分岐集合 D_1 と完全逆相解の D 型分岐集合 D_2 により発生した反転対称解は, D 型分岐集合 D_4 により対称性のない解を生ずる.

図 3.7.10 の四角形で囲まれた領域に存在する D_4 により発生した対称性のない解の分岐集合を図 3.7.11 に示す. 領域 \square において対称性なしの周期解が安定に存在する. 周期倍分岐集合 I_1 の内側では周期倍分岐の連鎖により, カオス・アトラクタとなる. そのパラメータ値での発振器 1 の内部状態を図 3.7.12(a) に, 発振器 1 と 2 の関係を図 3.7.12(b) に示す. (b) より対称性のないカオス・アトラクタであることがわかり, 対称操作により合計 4 個のカオス・アトラクタが存在する.

図 3.7.8 に示された Hopf 分岐集合 $2h_2$ により得られる“ずれた逆相解”の分岐図を図 3.7.13 に示す. 周期倍分岐 I_2 を起こすことにより, “ずれたほぼ同相”タイプの 2 周期解が発生し, 影をつけた領域 \square で存在する. セパトリクス・ループ L によりずれた逆相解が完全逆相解へ遷移し, 接線分岐集合 G_2 により, Hopf 分岐 $0h_2$ により発生した完全逆相解と対になり消滅する.

一方, 図 3.7.8 に示された Hopf 分岐集合 $2h_1$ により得られる“ずれたほぼ同相解”の分岐図を図 3.7.14 に示す. 接線分岐集合 G_4 が存在し, 不安定な“ずれたほぼ同相解”が折り曲げられ, 領域 \square で安定に存在する.

図 3.7.15 に図 3.7.1 のパラメータ ϵ を増加させた領域での分岐図を示す. D_3 と $2h_1$ により発生した“ずれたほぼ同相解”が D 型分岐 D_5 を起こし, ϵ を減少する方向に対称性のない解が発生する.

以上の解析により得られた平衡点と周期解の状態遷移をまとめて図 3.7.16 に示す. 同図より系 (3.3.5) に存在する平衡点と周期解の全種類, およびそれらの大域的な分岐も含めた遷移の様子が一目でわかる. 対称性の強い解は徐々に対称性を失い, 対称性のない解へと遷移することもわかる.

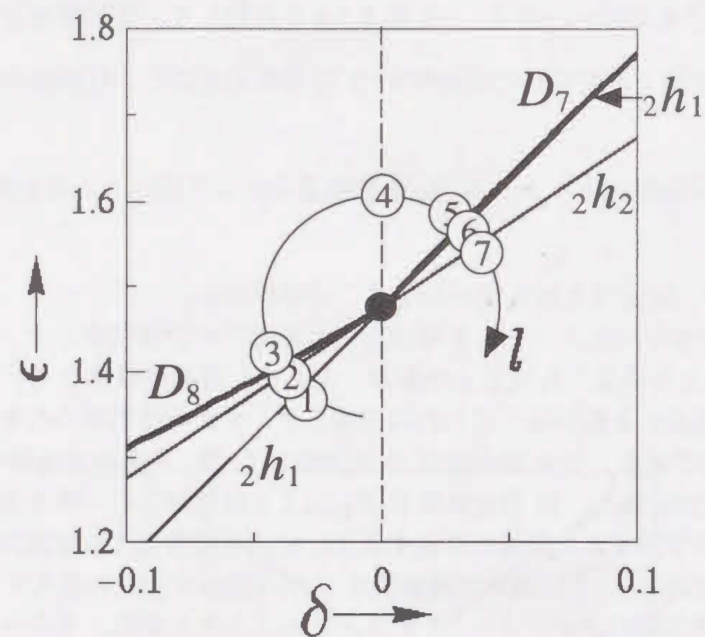


図 3.7.8: Hopf 分岐集合どうしの交わり点 (図 3.6.1 中の ⑤ 付近での周期解 (太い線) と平衡点 (細い線) の分岐図。

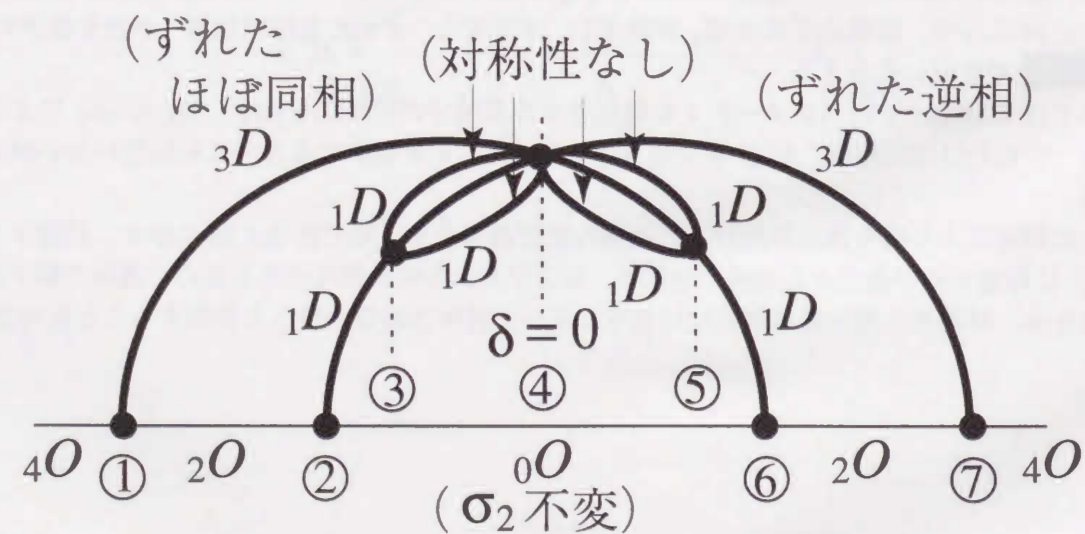


図 3.7.9: 図 3.7.8 中の曲線 l に沿った分岐図

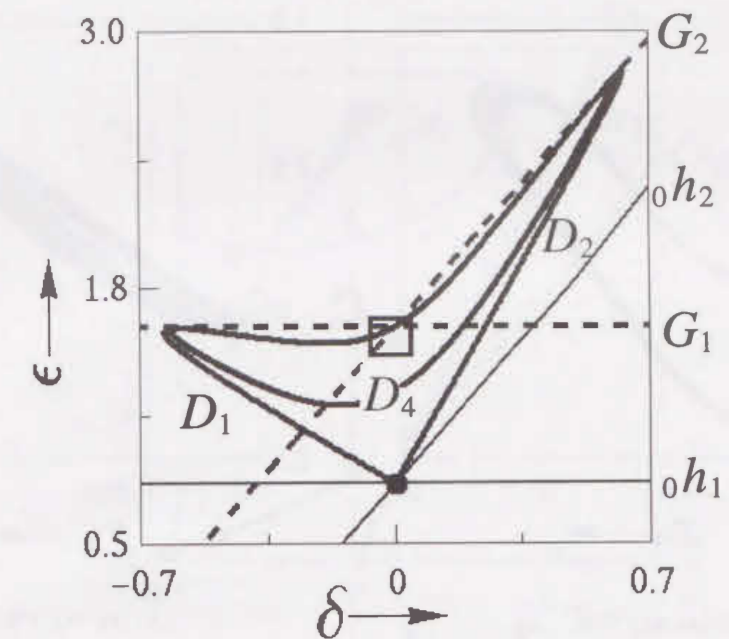


図 3.7.10: 原点の Hopf 分岐集合 $0h_1$ と $0h_2$ から発生した完全同相解と完全逆相解の分岐図。

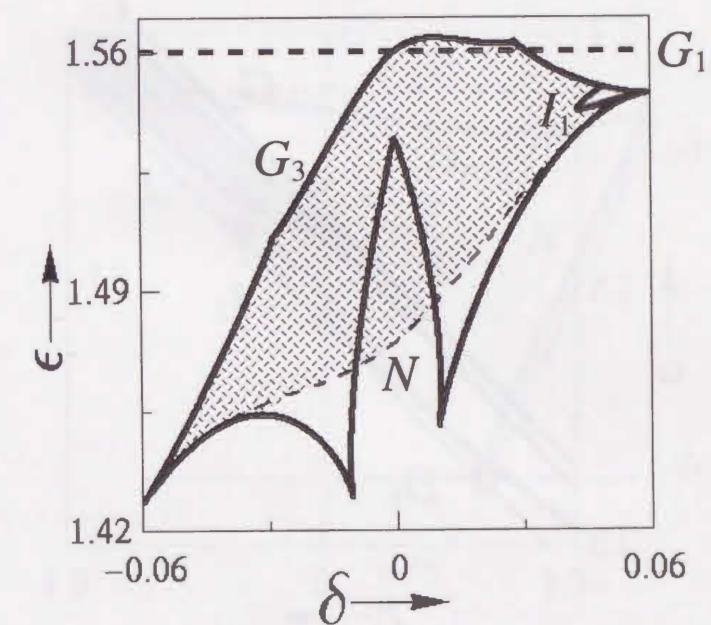
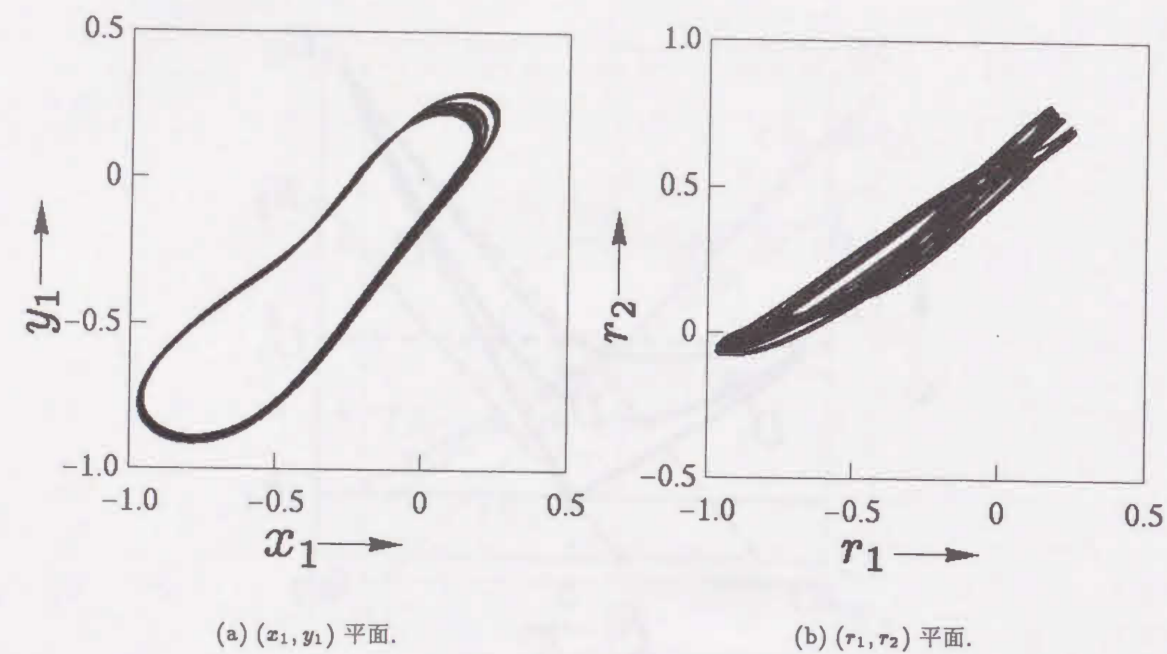
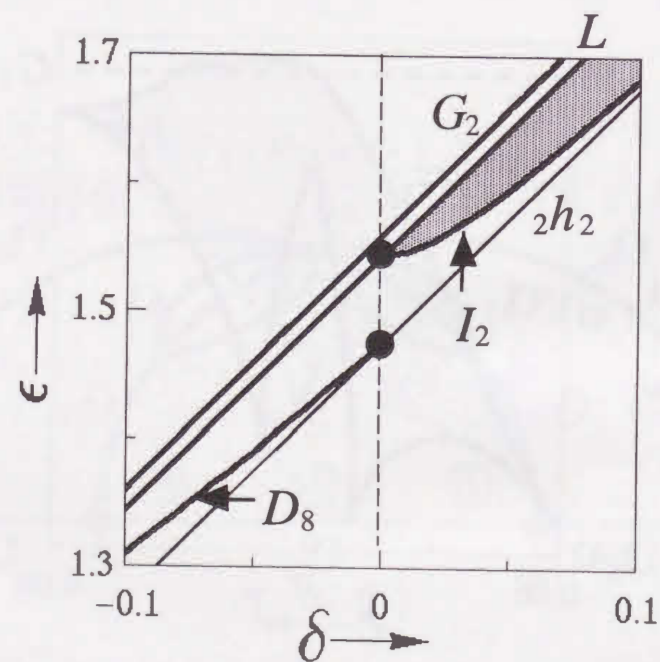
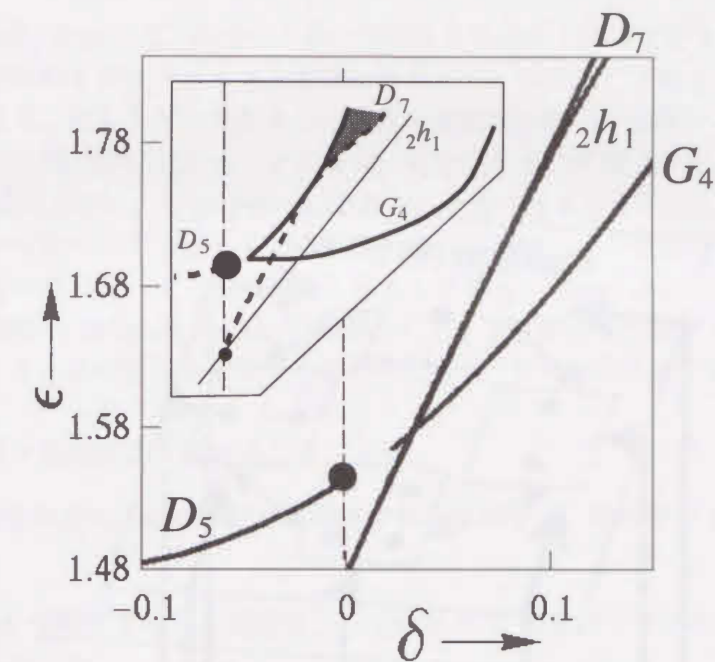
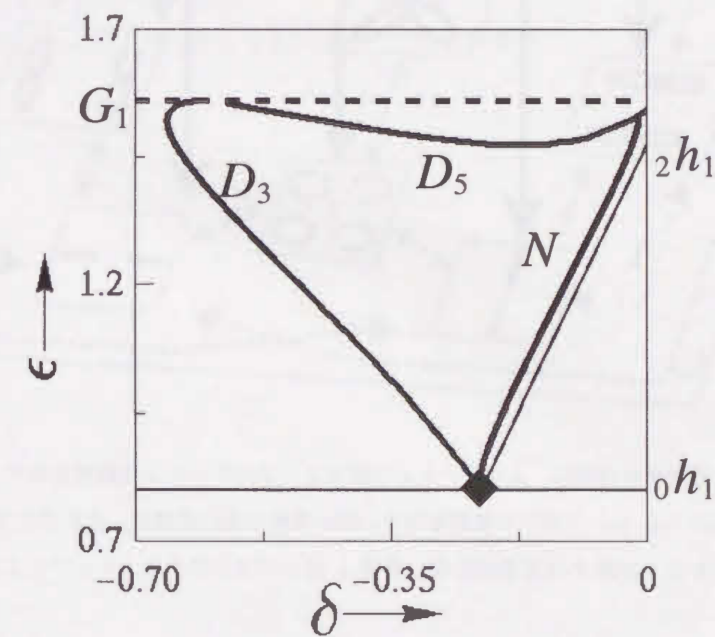


図 3.7.11: 図 3.7.10 の四角の部分の拡大図。対称性なしの周期解の分岐図。周期倍分岐集合 I_1 の内側において、周期倍分岐の連鎖によるカオスが観測される (図 3.7.12 参照)。

図 3.7.12: カオス・アトラクタ. $\epsilon = 1.546$, $\delta = 0.05$.図 3.7.13: Hopf 分岐集合 $2h_2$ により発生する“ずれた逆相解”の分岐図. L は“ずれた逆相解”のセパトリクス・ループを表す.図 3.7.14: Hopf 分岐集合 $2h_1$ により発生する“ずれたほぼ同相解”の分岐図. 五角形の中に模式図を示す.図 3.7.15: 完全同相解の D 型分岐集合 D_3 と σ_2 不変平衡点の Hopf 分岐集合 $2h_1$ から発生した, “ずれたほぼ同相解”の D 型分岐集合 D_5 .

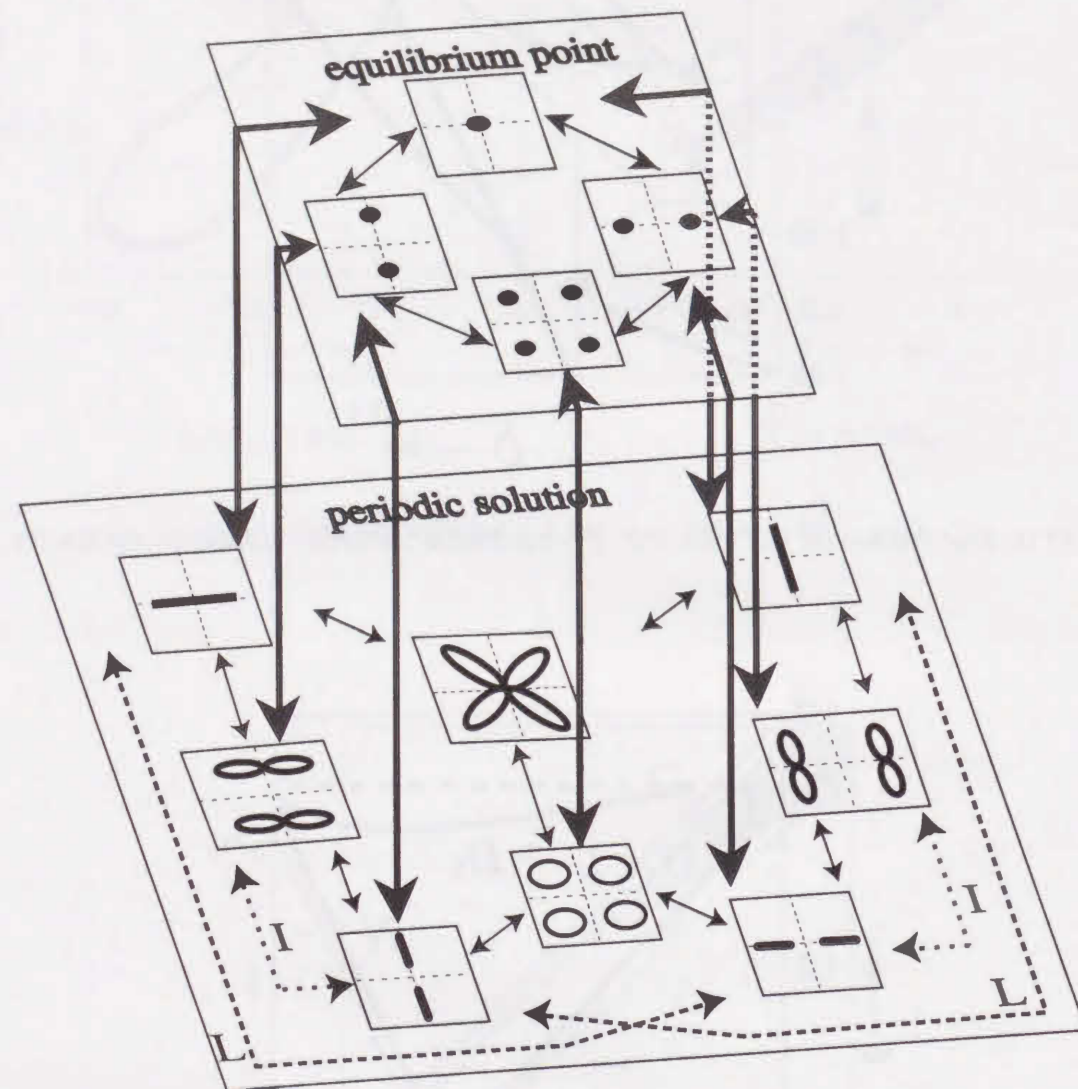


図 3.7.16: 平衡点と周期解の遷移図. 上のシートは平衡点を, 下のシートは周期解を表す. 各シート内の小さな四角形は (r_1, r_2) 平面での相図を示す. 細い実線と太い実線は, それぞれ D 型分枝と Hopf 分岐を意味する. 点線 I は周期倍分岐, 破線 L はセパトリクス・ループによる遷移を示す.

3.8 むすび

BVP 発振器を 2 個, 抵抗で電圧結合した系の平衡点と周期解の解析を行った. はじめに対称性により, 平衡点と周期解をそれぞれ 4 と 8 種類に分類した. 分類した平衡点と周期解の分岐集合を計算することにより, 異なる対称性をもつ平衡点・周期解の間での遷移を示した.

平衡点の分岐集合を解析的に求めることにより, 対称性をもつ平衡点が対称性破壊分岐である D 型分枝により対称性を失い, 対称性のない平衡点へと遷移する様子を示した. 平衡点の Hopf 分岐では, 平衡点が存在する不変部分空間内で発生する周期解と, 不変部分空間より飛び出す方向に発生する周期解の 2 パターンがみられた. それら平衡点の Hopf 分岐同士が交わると, 一般的には発生した周期解の Neimark-Sacker 分岐が生じトラスが発生するが [18,19], 本章の場合は Hopf 分岐同士が $\delta = 0$ の特殊な条件上で交わるために, トラスは発生せずに D 型分枝のみが存在した.

周期解の分岐集合を数値計算で求めることにより,

- 反転対称解は平衡点の Hopf 分岐では発生するのではなく, 周期解の D 型分枝により発生すること,
- 平衡点の Hopf 分岐で発生した周期解と, 周期解の D 型分枝で発生した周期解が同一の周期解となり得ること,
- 対称性のない周期解が周期倍分岐の連鎖により対称性のないカオス・アトラクタに遷移すること

などが明らかとなった. 筆者等の知る限り, BVP 発振器 2 個を 1 つの抵抗で結合することによりカオスを発生させたのは初めてである.

今後の課題としては大域的な分岐集合を求めることなどがある.

第4章

巡回結合発振器の解析

4.1 まえがき

生体にみられるリズム運動のモデル化として、環状に結合した発振器系がよく用いられ、さまざまな発振パターンが報告されている [2,20,21]. ニューラル・ネットワークにおいても環状結合は広く用いられ [22], 応用されている [23,24]. 単純に結合した場合, 結合発振器系では双方向性結合となり, ニューラル・ネットワークでは一方向性結合となる.

本章では結合発振器系において動的素子であるオペアンプを用いて一方向性結合を実現し, 従来の双方向性結合との結果と比較する. 結合部分だけの対称性を考えると, 一方向性結合では巡回群 C_n で, 双方向性結合では二面体群 D_n で表される. なお, 単体の発振器が状態変数の反転に対して対称となることを仮定するため, 結合系全体の対称性は一方向性結合では二面体群 D_n と同型となり, 双方向性結合ではそれ以上の複雑な群をもつ. 一方向性結合は双方向性結合より対称性が弱いので, 双方向性結合系でみられる分岐現象は一方向性結合系でみられる分岐現象の退化した場合であることを明らかにする.

4.3節では単体の発振器が発振しない状態で n 個, 環状に結合した系の安定な周期解の発生条件を調べた. 1次元回路を3個, 一方向結合した場合には, 結合の影響により三相解が発生することが知られている [25]. 本節では2次元発振器を n 個一方向結合した一般的な場合について, n が偶数か奇数かによりどのように発振現象に変化が起こるかを分岐理論を用いて解析を行う. 平衡点の Hopf 分岐集合を求めることにより, $n < 12$ では奇数個の場合のみ n 相発振を起こし, 偶数個では安定な n 相解は得られないことがわかった. $n \geq 12$ では奇数, 偶数に関わらず, 発振を起こす. 双方向結合ではいずれの場合も安定な周期解は得られなかった.

4.4節では単体の発振器が発振する状態で結合した系の周期解の分岐を考える. 4.3節で示した平衡点の分岐問題はすでに報告されているが [6], 周期解の分岐についての研究は数少ない. そこで周期解の分岐構造を解明する必要がある. 結合する発振器の個数が n 個の一般形での解析が困難であるために, 3個に限定して解析を行う. 3章の2個結合の場合と同様に, 対称性により平衡点と周期解を分類する. 分類した解の分岐集合を求めることにより, 異なる対称性をもつ解の間の遷移を示す. 分岐集合の数値計算において, 周期倍分岐の連鎖による対称性のないカオス・リベラを観測した.

4.4.3節では一方向と双方向の結合を混合させて結合部分に2面体群 D_3 と4元数群 Q_8 をもつ結合回路を構成した。それぞれの回路において得られる安定な発振パターンを分類し、通常の発振器を3個結合した D_3 対称回路において得ることのできなかった逆相発振パターンを得た。

4.2 回路方程式と対称性

4.2.1 一方向性結合

図4.2.1に示す発振器を n 個、結合した系を考える。出力端子 $b-b'$ を次の入力端子 $a-a'$ に順次結合することにより、一方向性結合発振器が構成される。回路方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned} L \frac{di_k}{dt} &= v_k - ri_k \\ C \frac{dv_k}{dt} &= -g(v_k) - i_k - G_0(v_k + v_{k-1}) \quad (k=1, 2, \dots, n, v_0 \equiv v_n) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

ここで非線形関数 $g(v_k)$ は

$$g(v_k) = -\left(g_1 - \frac{1}{R}\right)v_k + \frac{1}{3}v_k^3 = -\alpha v_k + \frac{1}{3}v_k^3 \quad (4.2.2)$$

と仮定した。式(4.2.1)において前の状態 v_{k-1} はマイナスがかかってきているために、ニューラル・ネットワークという抑制型の結合となっている。式(4.2.1)に変数変換(3.2.3)：

$$x_k = \sqrt{L}i_k, y_k = \sqrt{C}v_k, \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \epsilon = \frac{a_1}{C}, \beta = \frac{a_3}{a_1C}, \sigma = \frac{r}{L}, \delta = \frac{G}{C}$$

を行うことにより、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \omega y_k - \sigma x_k \\ \frac{dy_k}{dt} &= -\omega x_k + \epsilon(1 - \beta y_k^2)y_k - \delta(y_k + y_{k-1}) \quad (k=1, 2, \dots, n, y_0 \equiv y_n) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

単体の発振器が発振しない場合(4.3節)では式(4.2.1)について、単体の発振器が発振する場合(4.4節)では式(4.2.3)について解析を行った。次に式(4.2.1)(または式(4.2.3))のもつ対称性について考える。

次の行列を定義する。

$$P_1 = \begin{bmatrix} O & I_2 & \cdots & O \\ O & O & I_2 & \\ O & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O \\ I_2 & & & O \end{bmatrix}, \bar{I}_n = -I_n \quad (4.2.4)$$

ここで I_n は $n \times n$ の単位行列、 O は 2×2 の零行列である。対称性の定義(式(3.4.2))をみたす行列(対称操作)の集合：

$$\Gamma_1 = \{I_n, P_1, P_1^2, \dots, P_1^{n-1}, \bar{I}_n, \bar{I}_n P_1, \dots, \bar{I}_n P_1^{n-1}\} \quad (4.2.5)$$

は積に関して群をなす。 Γ_1 は巡回と反転の2つの部分群をもつ：

$$C_n = \{I_n, P_1, P_1^2, \dots, P_1^{n-1}\}, I = \{I_n, \bar{I}_n\}. \quad (4.2.6)$$

4.2.2 双方向性結合

図4.2.1においてオペアンプと抵抗 R を除き、出力端子 $b-b'$ を次の入力端子 $a-a'$ に順次結合することにより、双方向性結合発振器が構成される。回路方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned} L \frac{di_k}{dt} &= v_k - ri_k \\ C \frac{dv_k}{dt} &= -g(v_k) - i_k - G_0(2v_k - v_{k+1} - v_{k-1}) \quad (k=1, 2, \dots, n, v_0 \equiv v_n) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

一方向性結合の場合と同様に、変数変換を行うことにより次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \omega y_k - \sigma x_k \\ \frac{dy_k}{dt} &= -\omega x_k + \epsilon(1 - \beta y_k^2)y_k - \delta(2y_k - y_{k-1} - y_{k+1}) \quad (k=1, 2, \dots, n, y_0 \equiv y_n) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

次の行列を定義する。

$$P_2 = \begin{bmatrix} I_2 & O & \cdots & O \\ O & O & & I_2 \\ O & & \ddots & I_2 \\ \vdots & & & \\ O & I_2 & & O \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

対称操作の集合は次式で与えられる。

$$\Gamma_2 = \{I_n, P_1, P_1^2, \dots, P_1^{n-1}, P_2, P_1 P_2, \dots, P_1^{n-1} P_2, \bar{I}_n, \bar{I}_n P_1, \dots, \bar{I}_n P_1^{n-1}, \bar{I}_n P_2, \bar{I}_n P_1 P_2, \dots, \bar{I}_n P_1^{n-1} P_2\} \quad (4.2.10)$$

4.3 単体の発振器が発振しない場合での結合

4.3.1 一方向性結合

4.3.1.1 ヤコビ行列のブロック対角化

発振器の巡回に対して不変となる平衡点：

$$(1) v = 0, i = 0 \quad (4.3.1)$$

$$(2) v = \pm \sqrt{3\left(\alpha - \frac{1}{r} - 2G_0\right)}, \quad i = \frac{v}{r} \quad (4.3.2)$$

の分岐について考える。 n が偶数の場合は結合項が消去される平衡点：

$$(3) v_j = \pm(-1)^j \sqrt{3\left(\alpha - \frac{1}{r}\right)}, \quad i_j = \frac{v_j}{r} \quad (j=1, \dots, n) \quad (4.3.3)$$

が存在する。

ヤコビ行列を DF と書くと

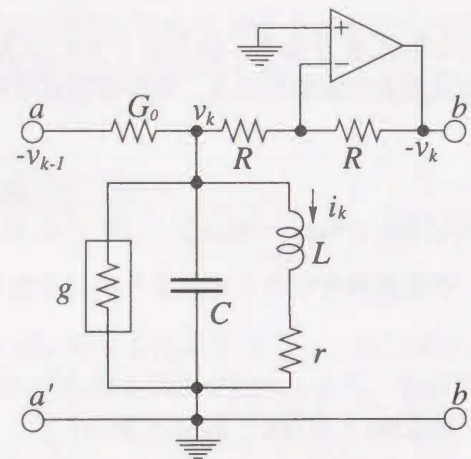


図 4.2.1: BVP 発振器と結合素子.

$$DF = \begin{bmatrix} A_0 & O & \cdots & A_1 \\ A_1 & A_0 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & A_1 & A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & O & \cdots & O \\ O & A_0 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & O & A_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & O & \cdots & A_1 \\ A_1 & O & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & A_1 & O \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

となる. ここで

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{C} - \frac{1}{C} v_*^2 - \frac{G_0}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{G_0}{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

とおいた. 従って \$DF\$ をブロック対角化するためには, 式 (4.3.4) の右辺第2項をブロック対角化すればよい. 巡回行列の固有値:

$$\exp(jm\theta), \quad \theta = \frac{2\pi}{n} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (4.3.6)$$

を用いて, 式 (4.3.4) の右辺第2項をブロック対角化するための実変換行列 \$Q\$ は式 (4.3.6) の各固有値に対応する固有ベクトルを並べた行列となる [26]. \$\cos(k\theta)\$, \$\sin(k\theta)\$ をそれぞれ \$c(k\theta)\$, \$s(k\theta)\$ で表すと,

\$n = 2l + 1\$ のとき

$$Q = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 \\ I_2 & c(\theta) I_2 & c(2\theta) I_2 & \cdots & c((n-2)\theta) I_2 & c((n-1)\theta) I_2 \\ O & s(\theta) I_2 & s(2\theta) I_2 & \cdots & s((n-2)\theta) I_2 & s((n-1)\theta) I_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ I_2 & c(l\theta) I_2 & c(2l\theta) I_2 & \cdots & c((n-2)l\theta) I_2 & c((n-1)l\theta) I_2 \\ O & s(l\theta) I_2 & s(2l\theta) I_2 & \cdots & s((n-2)l\theta) I_2 & s((n-1)l\theta) I_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

となり, \$n = 2l + 2\$ のとき

$$Q = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 \\ I_2 & c(\theta) I_2 & c(2\theta) I_2 & \cdots & c((n-2)\theta) I_2 & c((n-1)\theta) I_2 \\ O & s(\theta) I_2 & s(2\theta) I_2 & \cdots & s((n-2)\theta) I_2 & s((n-1)\theta) I_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ I_2 & c(l\theta) I_2 & c(2l\theta) I_2 & \cdots & c((n-2)l\theta) I_2 & c((n-1)l\theta) I_2 \\ O & s(l\theta) I_2 & s(2l\theta) I_2 & \cdots & s((n-2)l\theta) I_2 & s((n-1)l\theta) I_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} I_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

となる. 従ってヤコビ行列 \$DF\$ のブロック対角化は \$n = 2l + 1\$ のとき

$$Q^{-1} \cdot DF \cdot Q = \begin{bmatrix} B_0 & O & O & \cdots & O & O \\ O & B_1 & C_1 & \cdots & O & O \\ O & -C_1 & B_1 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & B_l & C_l \\ O & O & O & \cdots & -C_l & B_l \end{bmatrix} \quad (4.3.9)$$

\$n = 2l + 2\$ のとき

$$Q^{-1} \cdot DF \cdot Q = \begin{bmatrix} B_0 & O & O & \cdots & O & O & O \\ O & B_1 & C_1 & \cdots & O & O & O \\ O & -C_1 & B_1 & \cdots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & B_l & C_l & O \\ O & O & O & \cdots & -C_l & B_l & O \\ O & O & O & \cdots & O & O & B_{l+1} \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

となる. ここで

$$B_0 = A_0 + A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C}(\alpha - v_*^2 - 2G_0) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

$$B_{l+1} = A_0 - A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C}(\alpha - v_*^2) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

$$\begin{bmatrix} B_k & C_k \\ -C_k & B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + A_1 \cos(k\theta) & -A_1 \sin(k\theta) \\ A_1 \sin(k\theta) & A_0 + A_1 \cos(k\theta) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{1}{C}(\alpha - v_*^2 - G_0 - G_0 \cos(k\theta)) & -\frac{1}{C} & \frac{G_0}{C} \sin(k\theta) & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{r}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{G_0}{C} \sin(k\theta) & 0 & \frac{1}{C}(\alpha - v_*^2 - G_0 - G_0 \cos(k\theta)) & -\frac{1}{C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

(\$k = 1, 2, \dots, l\$)

とおいた。従って式(4.3.4)で与えられたヤコビ行列が、発振器の個数が奇数と偶数の場合について、それぞれ式(4.3.9)(4.3.10)の形にブロック対角化できた。

次の節では各ブロックについて分岐条件を調べる。それぞれのブロックの固有値により Hopf 分岐が生じた場合、次の周期解が発生することが、対応する固有ベクトルを調べることによりわかる。

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 \cdots \text{同相解} \\ B_{l+1} \cdots \text{隣接する発振器が逆相同期する周期解} \\ \text{行列 (4.3.13)} \cdots n \text{相解} \end{array} \right.$$

4.3.1.2 分岐集合の計算

はじめに B_0, B_{l+1} の固有値により D 型分枝と Hopf 分岐が生じる条件を表 4.3.1, 4.3.2 にまとめる。表 4.3.1, 4.3.2 において Hopf 分岐が起こるためには、条件 $r < \sqrt{L/C}$ が存在する。この条件は単体の発振器の発振条件と同じであることより、単体の発振器が発振を起こさないパラメータ値では、行列(4.3.11)と(4.3.12)の固有値が Hopf 分岐の条件を満たすことはない。すなわち、単体の発振器が発振しない状態では、結合しても同相解および隣接する発振器が逆相同期する解は、存在しないことを意味する。

表 4.3.1: 分岐の条件 (行列 (4.3.11) について)。

分岐 平衡点	D 型分枝	Hopf 分岐
タイプ (1)(原点)	$\alpha = 2G_0 + \frac{1}{r}$	$\alpha = 2G_0 + \frac{C}{L}r$
タイプ (2)	$\alpha = 2G_0 + \frac{1}{r}$	$\alpha = 2G_0 + \frac{1.5}{r} - \frac{C}{2L}r$
タイプ (3)	$\alpha = -G_0 + \frac{1}{r}$	$\alpha = -G_0 + \frac{1.5}{r} - \frac{C}{2L}r$

表 4.3.2: 分岐の条件 (行列 (4.3.12) について)。

分岐 平衡点	D 型分枝	Hopf 分岐
タイプ (1)(原点)	$\alpha = \frac{1}{r}$	$\alpha = \frac{C}{L}r$
タイプ (2)	$\alpha = 3G_0 + \frac{1}{r}$	$\alpha = 3G_0 + \frac{1.5}{r} - \frac{C}{2L}r$
タイプ (3)	$\alpha = \frac{1}{r}$	$\alpha = \frac{1.5}{r} - \frac{C}{2L}r$

次に行列(4.3.13)の固有値による分岐を考える。解析的に分岐の条件を求めるのが困難である

ために、数値計算により分岐集合を求めた。但し、式(4.3.13)において

$$s = \alpha - v_*^2 - G_0 - G_0 \cos(k\theta)$$

とおけば、行列式は

$$\frac{1}{L^2 C^2} \left((1 - sr)^2 + G_0^2 r^2 \sin^2(k\theta) \right) \neq 0$$

となるので行列(4.3.13)の固有値により D 型分枝が生じることは $G_0 \neq 0$ ではない。従って Hopf 分岐集合のみを求めた。

行列(4.3.13)において

$$k\theta = \frac{2k\pi}{2l+1(\text{または } 2l+2)}, \quad (k=1, \dots, l)$$

であるので、 $k\theta$ を 0 から π まで変化させれば、発振器の個数は $3 \sim \infty$ に対応し、 n が一般的な場合について結合の影響による分岐構造の変化を明らかにすることが可能となる。加えて、表 4.3.1, 4.3.2 の分岐条件は発振器の数が奇数か偶数かにのみ依存し、結合する発振器の数が増えても不変である。従って、発振器の個数 n が一般的な場合について、分岐図を描くことが可能となる。その結果を発振器の個数が奇数と偶数の場合に分けて、図 4.3.1 と 4.3.2 に示す。

はじめに D 型分枝集合について考える。両図において、表 4.3.1, 4.3.2 より、タイプ (2) の平衡点は $\alpha > 2G_0 + 1/r$ 、タイプ (3) の平衡点は $\alpha > 1/r$ で存在する。共に原点の D 型分枝により生じた平衡点である。図 4.3.2 では d_1 と d_2 が $G_0 = 0$ 上において交わり、余次元 4 の分岐が生じる。D 型分枝集合どうしが交わると、その点からさらに 2 つの D 型分枝集合が発生することが知られている。それらが d_3 と d_4 である。 d_3 と d_4 により共に (a, b, a, b, \dots) タイプの平衡点が発生するが不安定であり、新たな分岐は起こらない。

次に Hopf 分岐に着目する。図 4.3.1 と 4.3.2 において第 4 象限では原点が安定に存在する。そこからパラメータ α を増加させることにより、 n が奇数の場合 (図 4.3.1) は、Hopf 分岐にあたる。その結果、原点は 2 次元的に不安定となり、その周りに安定なリミット・サイクルが発生し発振が起こる。一方、 n が偶数の場合 (図 4.3.2) は D 型分枝集合 d_1 が存在するために、パラメータ α を増加させると、原点は 1 次元的に不安定になってから Hopf 分岐にあたる。従って発生するリミット・サイクルは不安定となり、発振現象は観測できない。このことが発振器の個数が奇数か偶数かによる一番大きな違いである。すなわち発振器の個数が奇数、偶数に関わらず、Hopf 分岐は存在し、リミット・サイクルは発生するが、安定性の違いにより、発振現象が観察できたり (n が奇数) できなかったり (n が偶数) する。図 4.3.1 と 4.3.2 において原点の Hopf 分岐以外にも各平衡点 (2)(3) の Hopf 分岐が存在するが、発生するリミット・サイクルは全て不安定である。

4.3.1.3 $n \geq 12$ の場合

前節において n が偶数の場合は、Hopf 分岐により安定なリミット・サイクルは得られないと報告した。しかし、 n を大きくすると Hopf 分岐集合の形状が変化し、図 4.3.2 で示した平衡点 (1) が安定に存在する領域内に入る (図 4.3.3, 4.3.5 参照)。従って安定な平衡点が Hopf 分岐を起こすことにより、安定な n 相解が得られる。図 4.3.3 の Hopf 分岐集合は行列(4.3.13)において $k=l$ を代入した場合に対応し、図 4.3.5 は $k=1$ に対応する。従って $n=12$ の場合で

考えると、図 4.3.3 の Hopf 分岐では隣り合う発振器の位相差が $5\pi/6$ ，図 4.3.5 では $\pi/6$ となる 1 2 相解が発生する。それぞれの波形を図 4.3.4 と 4.3.6 に示す。

発振器の個数を多くすると Hopf 分岐集合の形状が変化する現象は、単体の発振器が 2 次元系以上（行列 (4.3.13) が 4×4 以上）であるために起こる現象であり、文献 [25] で示された 1 次元回路を結合した系では決して起こらない。その場合には 4.3.1.2 節までの議論で全ての場合を説明することが可能である。

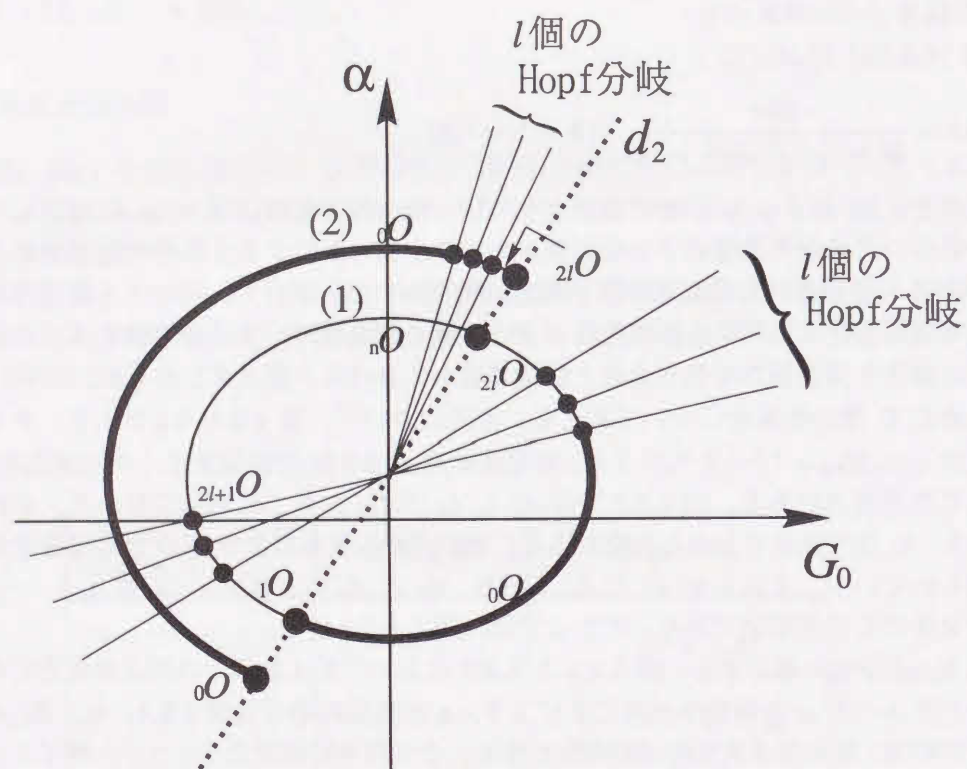


図 4.3.1: n が奇数 ($2l+1$) の場合のパラメータ平面 (G_0, α) の分岐図 (模式図)。 O は平衡点を表し、左下の添字は不安定次元を示す。括弧の中の数字は式 (4.3.1) (4.3.2) の平衡点に対応し、それらの平衡点の存在領域を曲線で示す。太い実線の範囲で平衡点が安定に存在し、黒丸で示した点において各平衡点は分岐を起こす。

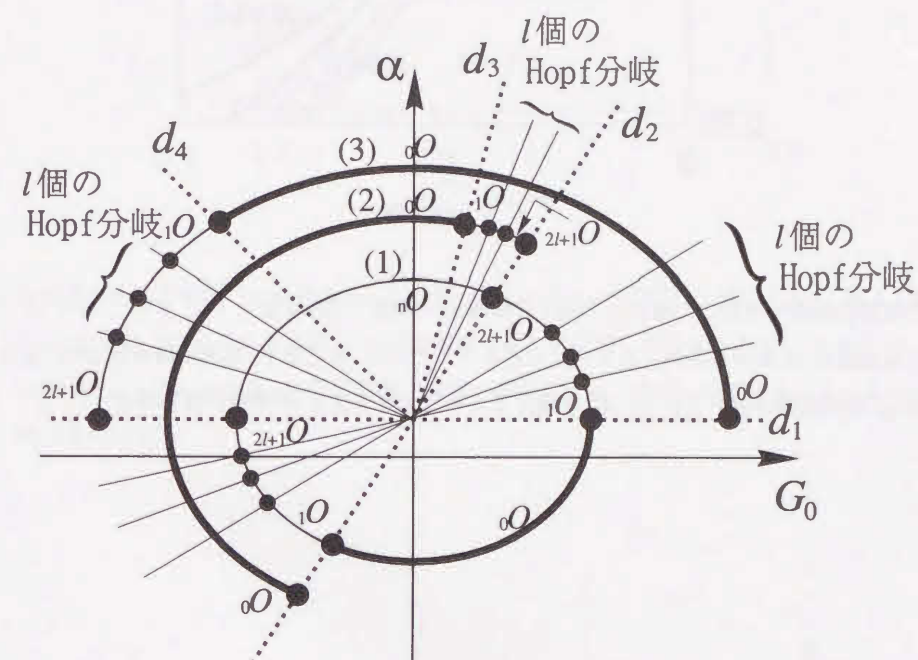


図 4.3.2: n が偶数 ($2l+2$) の場合のパラメータ平面 (G_0, α) の分岐図 (模式図)。記号は図 4.3.1 と同じである。奇数の場合と異なり、タイプ (3) の平衡点が d_1 より α が大きい領域で存在する。

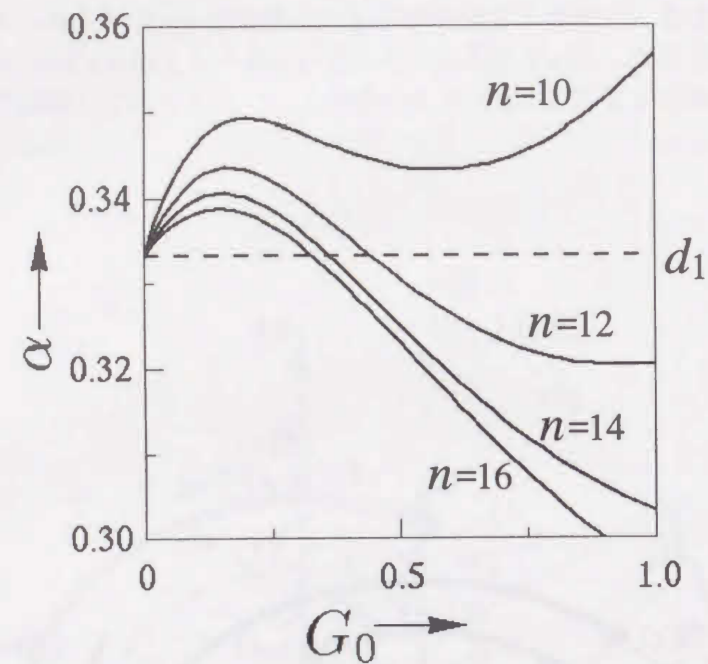


図 4.3.3: 発振器の個数を増加した場合の Hopf 分岐曲線 (実線) の形状変化 ($G_0 > 0$). $n = 10$ では Hopf 分岐曲線は D 型分岐曲線 (d_1) の上に存在するために 安定な 10 相解は得られない. $n \geq 12$ では Hopf 分岐曲線が垂れ下がり, d_1 を超えることにより安定な n 相解が得られる.

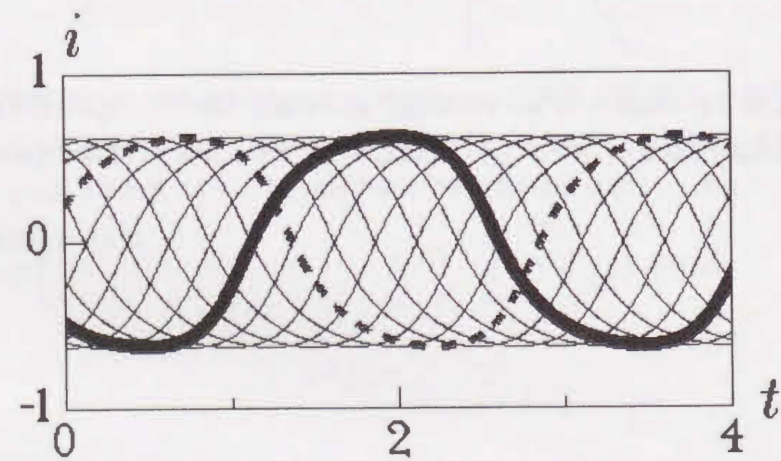


図 4.3.4: 図 4.3.3 の Hopf 分岐曲線 ($n = 12$) により発生した安定な 12 相解. 隣り合う発振器 (太い実線と点線) の位相差は $5\pi/6$ である. $\alpha = 1.72$, $G_0 = 1.0$.

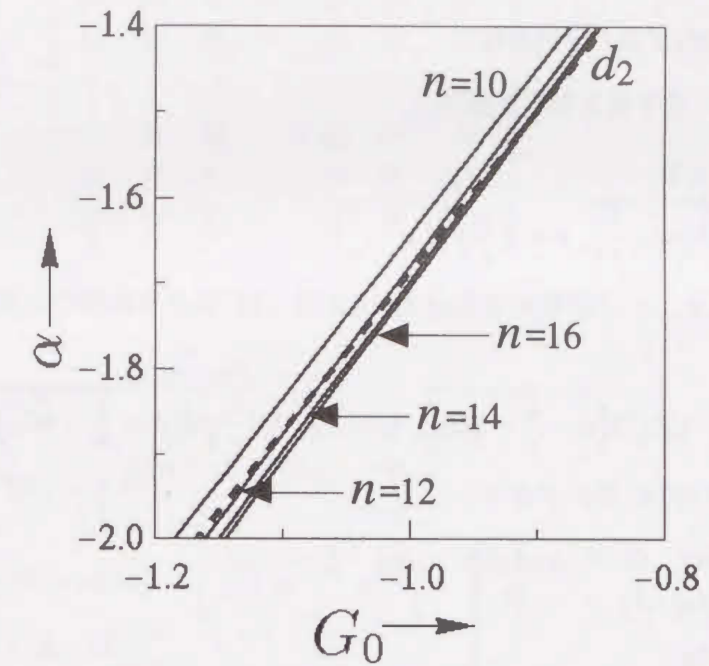


図 4.3.5: 発振器の個数を増加した場合の Hopf 分岐曲線 (実線) の形状変化 ($G_0 < 0$). 図 4.3.3 と同様に, $n = 10$ では Hopf 分岐曲線は D 型分岐曲線 (d_2) の左側に存在するために 安定な 10 相解は得られない. $n \geq 12$ では Hopf 分岐曲線は右側に移動し, d_2 (点線) を超えることにより安定な n 相解が得られる.

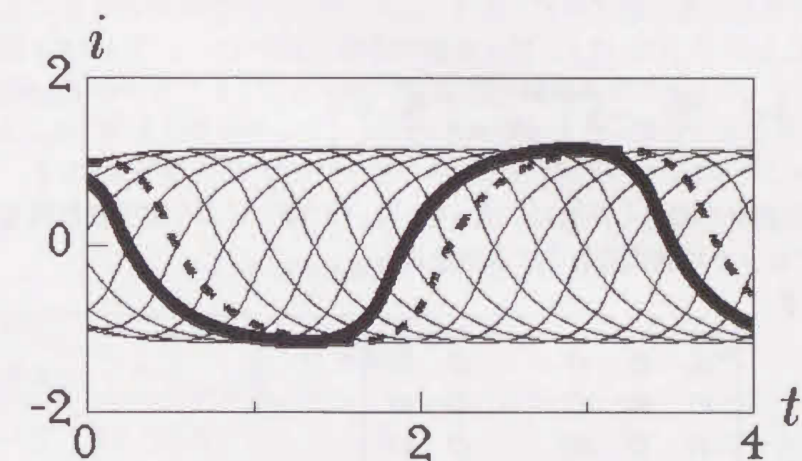


図 4.3.6: 図 4.3.5 の Hopf 分岐曲線 ($n = 12$) により発生した安定な 12 相解. 隣り合う発振器の位相差は $\pi/6$ である. $\alpha = 1.8$, $G_0 = -1.5$.

4.3.2 双方向性結合

4.3.2.1 ヤコビ行列のブロック対角化

発振器の巡回に対して不変となる平衡点：

$$(1) \quad v = 0, i = 0 \quad (4.3.14)$$

$$(2) \quad v = \pm \sqrt{3\left(\alpha - \frac{1}{r}\right)}, i = \pm \frac{1}{r} \sqrt{3\left(\alpha - \frac{1}{r}\right)} \quad (4.3.15)$$

の分岐について考える。\$n\$ が偶数の場合は式 (4.2.7) の右辺が奇関数のために生ずる特殊な平衡点：

$$(3) \quad v_j = \pm (-1)^j \sqrt{3\left(\alpha - \frac{1}{r} - 4G_0\right)}, i_j = \pm (-1)^j \frac{1}{r} \sqrt{3\left(\alpha - \frac{1}{r} - 4G_0\right)} \quad (4.3.16)$$

が存在する。ヤコビ行列を \$DF\$ と書くと

$$DF = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & O & \cdots & A_1 \\ A_1 & A_0 & A_1 & \cdots & O \\ O & A_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & A_1 \\ A_1 & O & \cdots & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \quad (4.3.17)$$

$$= \begin{bmatrix} A_0 & O & O & \cdots & O \\ O & A_0 & O & \cdots & O \\ O & O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & O & \cdots & O & A_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & A_1 & O & \cdots & O \\ O & O & A_1 & \cdots & O \\ O & O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & A_1 \\ A_1 & O & \cdots & O & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & O & O & \cdots & A_1 \\ A_1 & O & O & \cdots & O \\ O & A_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & O & \cdots & A_1 & O \end{bmatrix}$$

ここで

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{C} - \frac{1}{C} v_*^2 - \frac{2G_0}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \frac{G_0}{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.18)$$

とおいた。一方向性結合の場合と同様に、式 (4.3.7), (4.3.8) により実変換行列 \$Q\$ を求めて、ヤコビ行列 \$DF\$ のブロック対角化を行うと次式を得る。

\$n = 2l + 1\$ のとき

$$Q^{-1} \cdot DF \cdot Q = \begin{bmatrix} B_0 & O & O & \cdots & O & O \\ O & B_1 & O & \cdots & O & O \\ O & O & B_1 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & B_l & O \\ O & O & O & \cdots & O & B_l \end{bmatrix} \quad (4.3.19)$$

\$n = 2l + 2\$ のとき

4.3. 単体の発振器が発振しない場合での結合

$$Q^{-1} \cdot DF \cdot Q = \begin{bmatrix} B_0 & O & O & \cdots & O & 0 & O \\ O & B_1 & O & \cdots & O & O & O \\ O & O & B_1 & \cdots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & B_l & O & O \\ O & O & O & \cdots & O & B_l & O \\ O & O & O & \cdots & O & O & B_{l+1} \end{bmatrix} \quad (4.3.20)$$

となる。ここで

$$B_0 = A_0 + 2A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C}(\alpha - v_*^2) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \quad (4.3.21)$$

$$B_{l+1} = A_0 - 2A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C}(\alpha - v_*^2 - 4G_0) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \quad (4.3.22)$$

$$B_k = A_0 + 2A_1 \cos(k\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C}(\alpha - v_*^2 - 2G_0 + 2G_0 \cos(k\theta)) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{r}{L} \end{bmatrix} \quad (4.3.23)$$

$$(k = 1, 2, \dots, l)$$

となる。

4.3.2.2 分岐集合の計算

行列 (4.3.21) (4.3.22) (4.3.23) について、各固有値を求めることにより得た分岐条件をそれぞれ表 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5 に示す。Hopf 分岐が生じるためには、条件 \$r < \sqrt{L/C}\$ がついており、単体の発振器が発振しない場合は \$r > \sqrt{L/C}\$ であるので、双方向結合においては、周期振動は生じず、平衡点の D 型分岐が起こるのみである。結合する発振器の数が奇数と偶数の場合にわけ、分岐図を図 4.3.7 と図 4.3.8 に示す。奇数の場合 (図 4.3.7) は行列 (4.3.22) は存在しないので、表 4.3.3 と 4.3.5 のタイプ (1) と (2) の D 型分岐のみが存在する。すなわち原点の D 型分岐 (\$d_1: \alpha = 1/r\$) によりタイプ (2) の平衡点が発生する。偶数の場合 (図 4.3.8) は奇数の場合に加えて、表 4.3.4 に示す D 型分岐が起こり、分岐構造はより複雑となる。

表 4.3.3: 分岐の条件 (行列 (4.3.21) について)。

平衡点 \ 分岐	D 型分岐	Hopf 分岐
タイプ (1) (原点)	$\alpha = \frac{1}{r}$	$\alpha = \frac{C}{L}r \quad (r < \sqrt{\frac{L}{C}})$
タイプ (2)	$\alpha = \frac{1}{r}$	$\alpha = \frac{1.5}{r} - \frac{C}{2L}r \quad (r < \sqrt{\frac{L}{C}})$
タイプ (3)	$\alpha = 6G_0 + \frac{1}{r}$	$\alpha = 6G_0 + \frac{1.5}{r} - \frac{C}{2L}r \quad (r < \sqrt{\frac{L}{C}})$

4.4 単体の発振器が発振する場合での結合

4.4.1 一方向性結合

周期解の分岐を調べるために、発振器の個数を3個に固定して解析を行う。系を記述する方程式(4.2.3)は次式となる。

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \omega y_1 - \sigma x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\omega x_1 + \epsilon(1 - \beta y_1^2)y_1 - \delta(y_1 + y_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \omega y_2 - \sigma x_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\omega x_2 + \epsilon(1 - \beta y_2^2)y_2 - \delta(y_2 + y_1) \\ \frac{dx_3}{dt} &= \omega y_3 - \sigma x_3 \\ \frac{dy_3}{dt} &= -\omega x_3 + \epsilon(1 - \beta y_3^2)y_3 - \delta(y_3 + y_2)\end{aligned}\quad (4.4.1)$$

対称性を記述する式(4.2.5)として

$$\Gamma_1 = \{I_6, P_1, P_1^2, \bar{I}_6, \bar{I}_6 P_1, \bar{I}_6 P_1^2\} \quad (4.4.2)$$

を得る。 Γ_1 は次の部分群：

$$C_3 = \{I_6, P_1, P_1^2\}, I = \{I_6, \bar{I}_6\} \quad (4.4.3)$$

をもち、共役類[27]は Γ_1 の各元となる：

$$\{I_6\}, \{P_1\}, \{P_1^2\}, \{\bar{I}_6\}, \{\bar{I}_6 P_1\}, \{\bar{I}_6 P_1^2\} \quad (4.4.4)$$

以下の解析において、式(4.2.3)中のパラメータは次の値に固定した。

$$c_3 = 1/3, \beta = 1.0, \omega = 1.0, \sigma = 0.5. \quad (4.4.5)$$

$\sigma < 1$ であることより、単体の発振器は発振を起こす。

4.4.1.1 平衡点と周期解の分類

はじめに対称性を用いて平衡点を分類することにより表4.4.1を得る。表4.4.1より平衡点は3種類に分類できることがわかる。対称性のない平衡点は Γ_1 の各元による操作により、6個の平衡点が共存する。解軌道の空間的な対称性をみやすくするために次の座標変換を行う。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

対称性により分類した6種類の周期解を表4.4.2に示す。図4.4.1に (u_2, u_3) 平面での解軌道と時間波形を示す。但し、完全同相解と“ずれた同相解”は $u_2 = u_3 = 0$ となる(u_1 軸上に存在する)ので省略した。周期解の対称性の定義式(3.4.5)による分類では、三相解の相順の異なる解の区別ができないが、図4.4.1より三相と“ずれた三相解”は相順の異なる2種類が存在することがわかる。従って、合計で8種類の周期解が存在する。


表 4.4.1: 対称性による平衡点の分類。

平衡点の名称	等方化部分群	個数	座標
完全対称	Γ_1	1	$(0, 0, 0)$
C_3 不変	C_3	2	(a, a, a)
対称性なし	I_6	6	(a, b, c)

表 4.4.2: 周期解の分類。 P_1^2 による対称性は P_1 と同じになるので省略した。3章の2個結合系の場合と同様に \bar{I}_6 の対称性をもたない周期解には“ずれた”という単語を用いた。


名称	対称性	個数
完全同相	$(P_1, 0), (\bar{I}_6, L/2), (\bar{I}_6 P_1, L/2), (\bar{I}_6 P_1^2, L/2)$	1
ずれた同相	$(P_1, 0)$	2
三相 ① ②	$(P_1, L/3), (\bar{I}_6, L/2), (\bar{I}_6 P_1, L/6), (\bar{I}_6 P_1^2, L/6)$	1
ずれた三相 ① ②	$(P_1, L/3)$	2
反転対称	$(\bar{I}_6, L/2)$	3
対称性なし	なし	6

4.4.1.2 平衡点と周期解の分岐

図4.4.2に対称性をもつ平衡点の分岐図を示す。領域  において完全対称である原点が安定に存在する。丸印はHopf分岐集合どうしの交わりによる余次元2の分岐点を表す(Hopf-Hopf分岐とよばれる[18])。図4.4.2中の四角形はD型分枝とHopf分岐集合の交わりによる余次元3の分岐点を表す(D型分枝が絡んだ場合の余次元の高い分岐については文献[18,19]では述べられていない)。それぞれの中に数字が書き込まれている点の近傍での、詳しい分岐図を以下に示す。

はじめに表4.4.3に図4.4.2中の分岐によりどのような解が発生するのかをまとめる。対称性をもつ平衡点の固有空間は、2次元同相方向と4次元三相方向に分割されるので、図4.4.2に示された分岐により発生する解は、同相または三相方向に制限される。従って反転対称解は平衡点のHopf分岐よりは発生しないことがわかる。

図4.4.3にHopf分岐集合 $0h_1$ と $0h_2$ の交わり点(図4.4.2での①)付近での詳しい分岐図を示す。 $0h_1$ により ϵ を増加させる向きに同相解が発生する。 $0h_2$ により、交点(①)より ϵ が小さい部分では δ を減少させる方向に、 ϵ が大きい部分では ϵ を増加させる向きに三相解①が発生する。それぞれのHopf分岐により発生する周期解の不安定次元は、交点(①)を境に2つ変化する。しかし、交点から2つのNeimark-Sacker分岐 N_1 と N_2 が発生するために、発生する周期解の不安定次元はそれぞれ等しくなる。 N_1 と N_2 により発生する準周期解については観測することができなかった。なお $0h_2$ より発生した2つの三相解①は、接線分岐 G_1 により対になって消滅する。

図4.4.4にHopf分岐 $0h_2$ により発生する三相解①の分岐図を示す。 $0h_2$ により、2次元不安定な三相解①が発生するが、Neimark-Sacker分岐 N_3 により領域  で安定に存在する。一

方, Hopf 分岐 ${}_0h_3$ により発生した安定な三相解 ② が ϵ が ${}_0h_3$ より大きい領域で存在する. 従って領域 \square では2つの安定な三相解が共存し, どちらの三相解に収束するかは状態の初期値により決まる. D 型分枝 D_1 により, 三相解 ① から“ずれた三相解 ①”が発生する. 黒丸は D 型分枝と Neimark-Sacker 分岐の交わりによる余次元3の分岐点を表す. この点からは D 型分枝により発生した“ずれた三相解 ①”の Neimark-Sacker 分岐 N_4 が発生する. N_3 と N_4 により準周期解が発生し, 発生・消滅の分岐が起こることが予想される.

図 4.4.5 に Hopf 分岐集合 ${}_1h_1$ と ${}_1h_3$ の交わり点 (図 4.4.2 での ②) 付近での詳しい分岐図を示す. 図 4.4.3 の場合と同様に2つの Neimark-Sacker 分岐集合 N_5 (“ずれた三相解 ②”の分岐), N_6 (“ずれた同相解”の分岐) と接線分岐集合 G_3 が存在する. しかし, ② の近傍では G_3 の他にも接線分岐集合が複数存在し, “ずれた三相解 ②”が折り曲げられ, 共存領域が観測された.

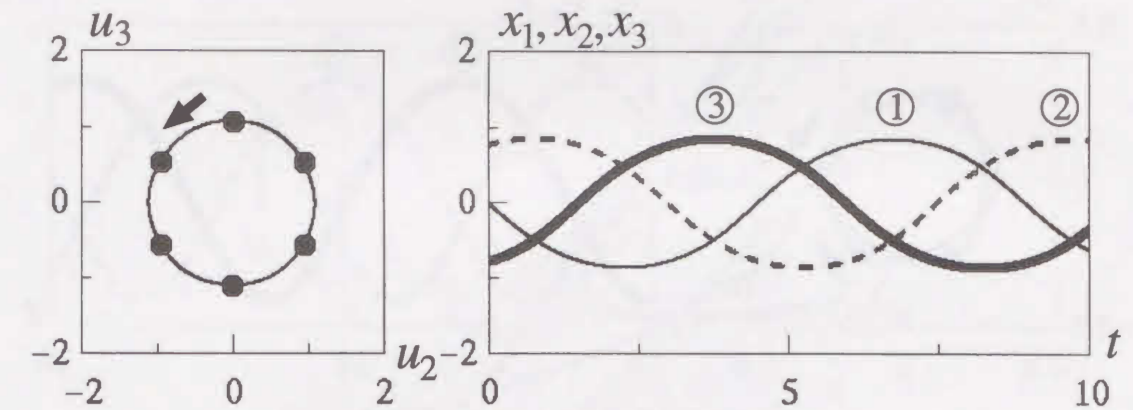
図 4.4.6 に Hopf 分岐集合 ${}_0h_3$ と ${}_0d_1$ の交わり点 (図 4.4.2 での ①) 付近での詳しい分岐図を示す. この余次元3の分岐点からは平衡点の Hopf 分岐 ${}_1h_3$, 周期解の D 型分枝 D_2 と Neimark-Sacker 分岐 N_7 が必然的に生じる. 周期解の状態遷移は次の通りである: Hopf 分岐集合 ${}_0h_3$ により発生した三相解 ② (図 4.4.1 (b)) は対称性破壊分岐である D 型分枝 D_2 を起こし, “ずれた三相解 ②” (図 4.4.1 (d)) を生ずる. 発生した“ずれた三相解 ②”は Neimark-Sacker 分岐 N_7 を起こしたあと ${}_0d_1$ により発生した C_3 不変平衡点の Hopf 分岐 ${}_1h_3$ により消滅する.

図 4.4.7 に反転対称解の発生する接線分岐集合を示す. 最大で4種類の反転対称解が存在する. 示したパラメータ領域において, 安定に存在する解は見えなかった.

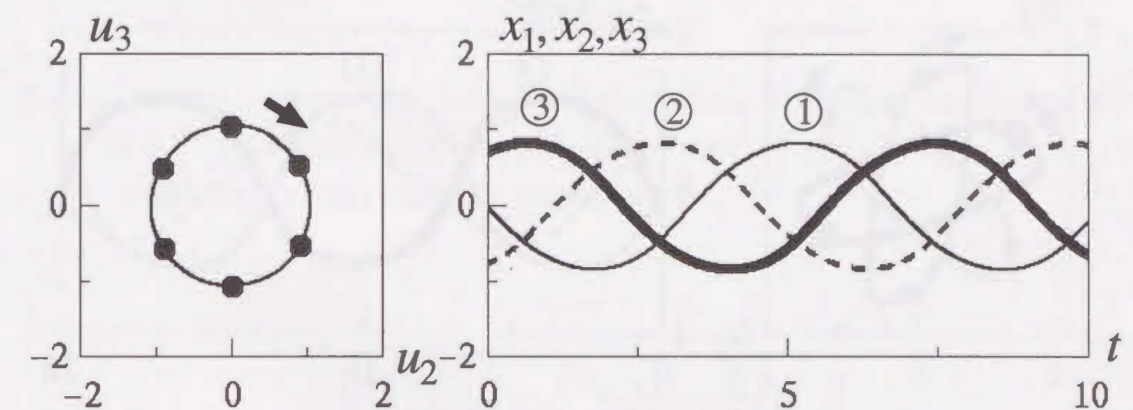
図 4.4.8 に対称性のない平衡点の分岐図を示す. 黒丸は Fold-Hopf 分岐とよばれる [18], 接線分岐と Hopf 分岐の交わりによる余次元2の分岐点を表す. 領域 \square において完全不安定な平衡点が存在し, パラメータ ϵ を増加させることにより, 3つの Hopf 分岐を経て, 領域 \blacksquare では完全安定となる. はじめの Hopf 分岐 h により発生した完全不安定な周期解は ϵ の増加に伴い, 周期倍分岐の連鎖を経てカオス・リペラとなる (図 4.4.9 参照). Runge-Kutta 法において, 逆時間方向に解いて得られた相平面図を図 4.4.10 に示す. (u_2, u_3) 平面の相図 (d) より対称性のないカオス・リペラであることがわかり, 対称操作により6個存在する.

表 4.4.3: 図 4.4.2 に示された分岐.

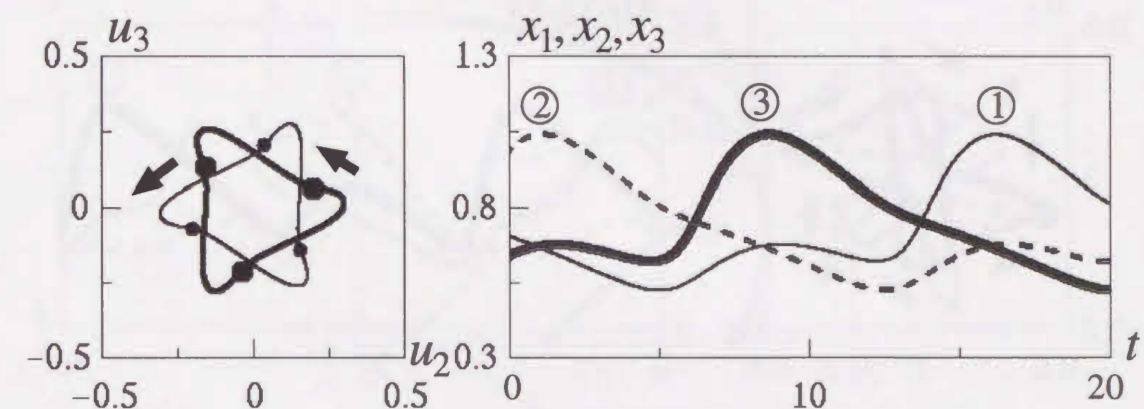
図 4.4.2 中での記号	分岐		
${}_0d_1$	原点	\Leftrightarrow	C_3 不変
${}_0h_1$	原点	\Leftrightarrow	同相
${}_0h_2$	原点	\Leftrightarrow	三相 ①
${}_0h_3$	原点	\Leftrightarrow	三相 ②
${}_1h_1$	C_3 不変	\Leftrightarrow	ずれた同相
${}_1h_2$	C_3 不変	\Leftrightarrow	ずれた三相 ①
${}_1h_3$	C_3 不変	\Leftrightarrow	ずれた三相 ②



(a) 三相 ①. $\delta = 0.2, \epsilon = 1.4$.



(b) 三相 ②. $\delta = 0.2, \epsilon = 1.4$.



(c) ずれた三相 ①. $\delta = 0.6, \epsilon = 3.84$.

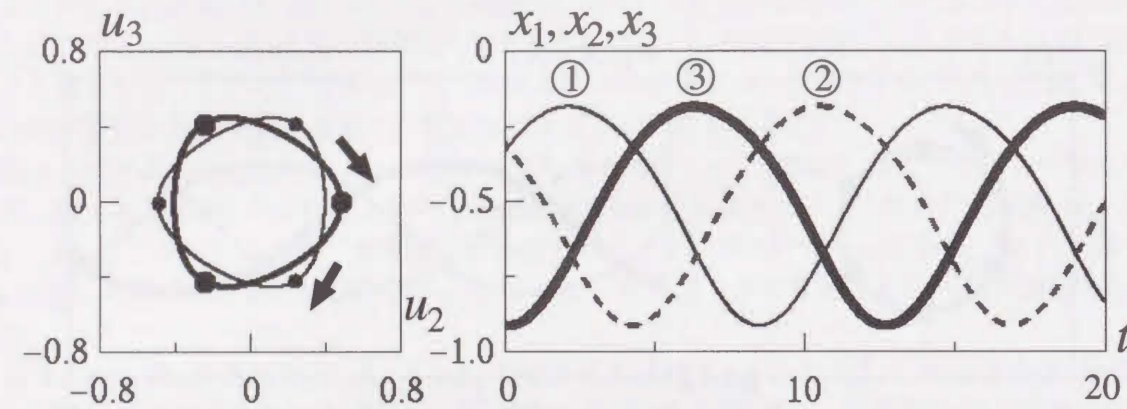
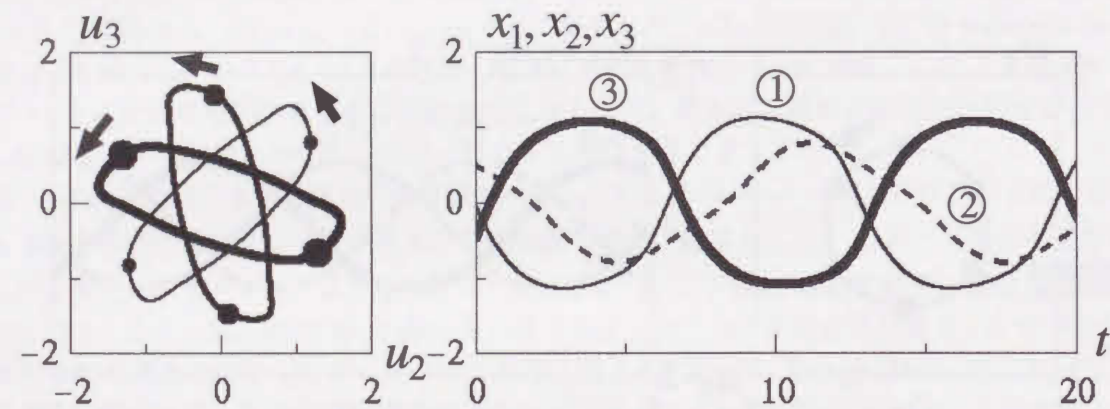
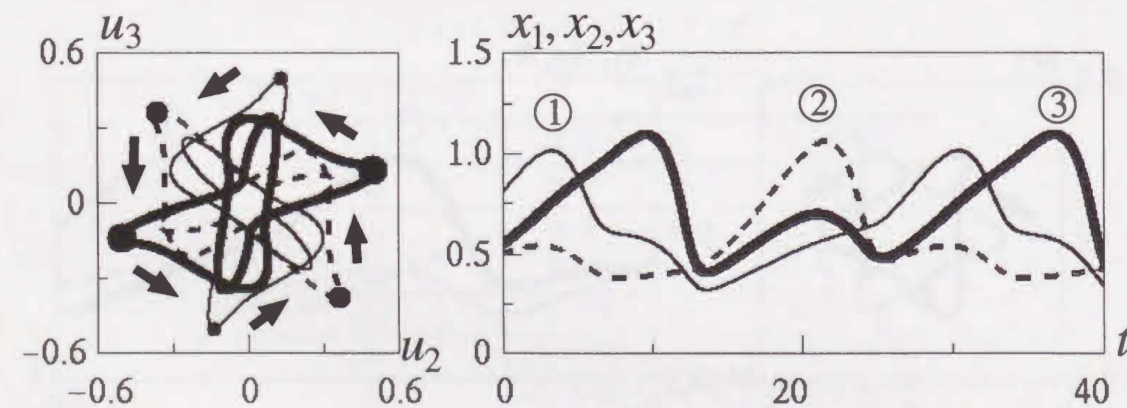
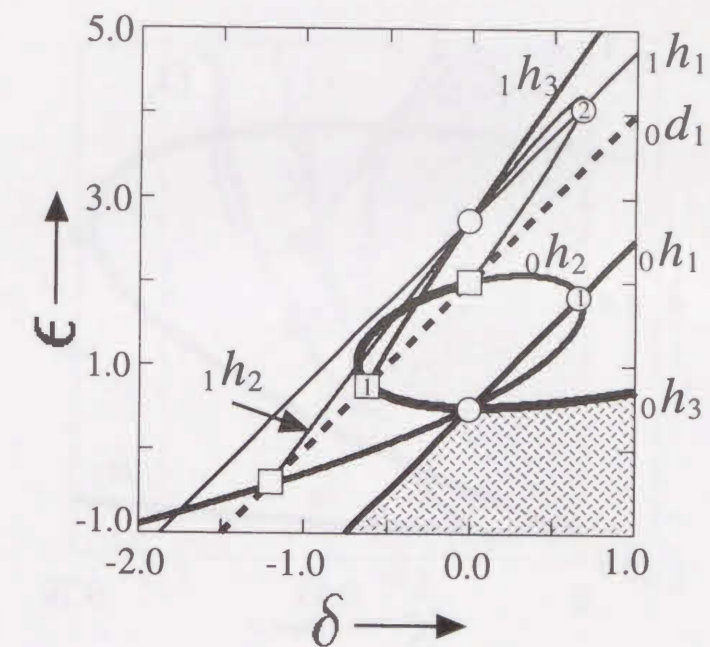
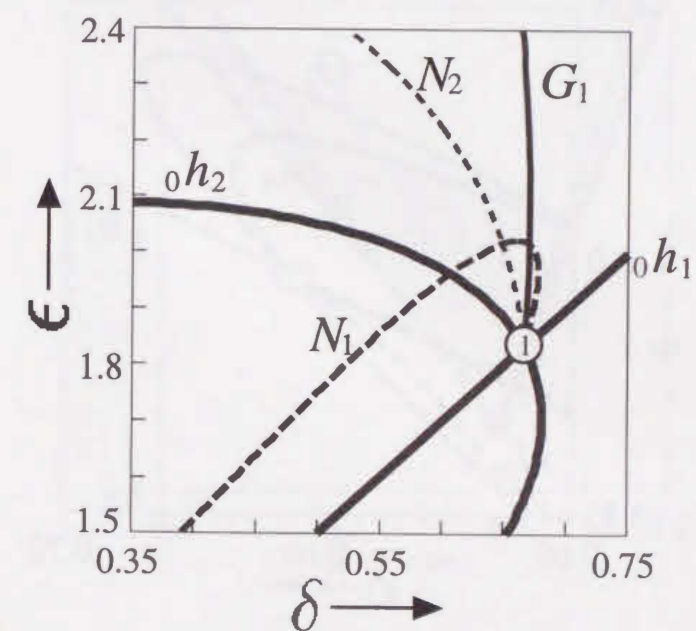
(d) ずれた三相 ②. $\delta = -0.59$, $\epsilon = 0.98$.(e) 反転対称. $\delta = 0.41$, $\epsilon = 2.5$.(f) 対称性なし. $\delta = 0.59$, $\epsilon = 3.8$.

図 4.4.1: 周期解の分類. 矢印は軌道方向を示す. (左) 相図, (右) 波形.

図 4.4.2: 対称性をもつ平衡点の分岐図. 記号 d と h はそれぞれ平衡点の D 型分枝と Hopf 分岐集合を表す. d と h の左下の添字は分岐を起こす平衡点の種類 (0 は原点, 1 は C_3 不変平衡点) を示し, 右下の添字は分岐する方向 (0 は同相, 3 は三相方向) を表す.図 4.4.3: Hopf 分岐集合 ${}_0h_2$ と ${}_0h_1$ の交わりによる余次元 2 の分岐点 (丸印) 付近での周期解の分岐図. 記号 N と D は周期解の Neimark-Sacker 分枝と D 型分枝集合を表す.

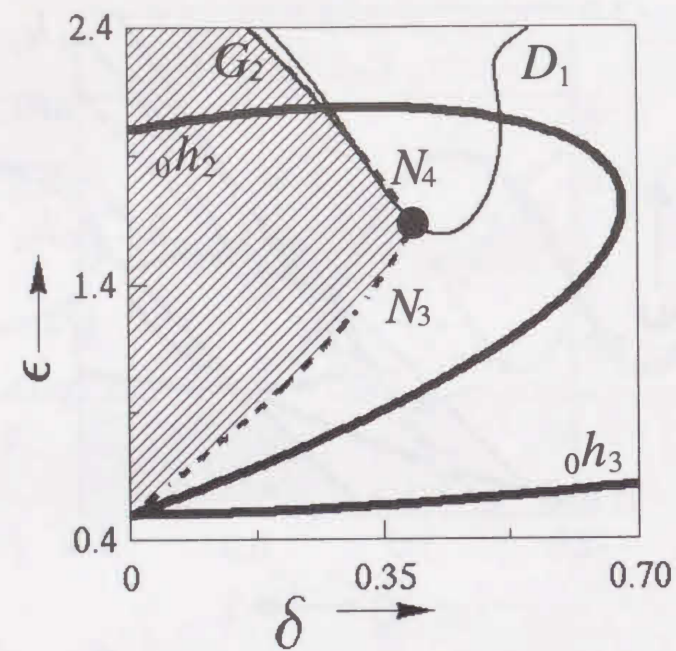


図 4.4.4: 三相解 ① の分岐図. 影をつけた領域で安定な 2 種類の三相解が共存する.

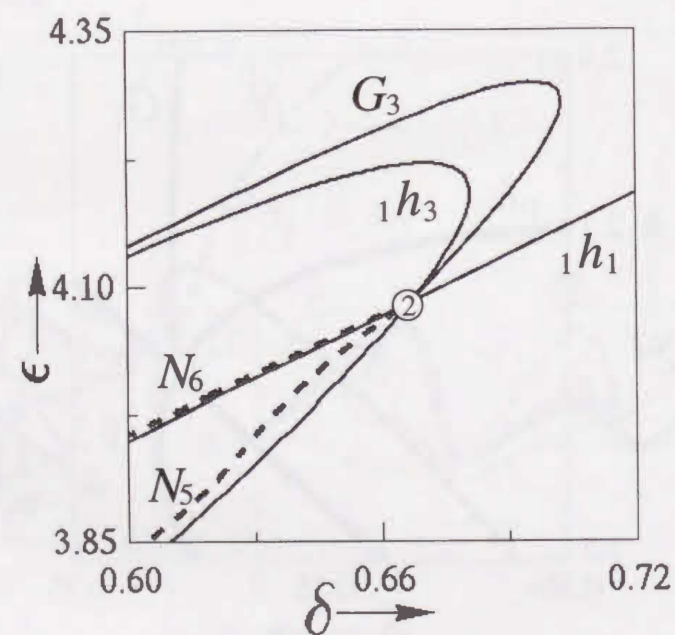


図 4.4.5: G_3 不変平衡点の Hopf 分岐集合 $1h_3$ と $1h_1$ の交わりによる余次元 2 の分岐点 (②) 付近での周期解の分岐図.

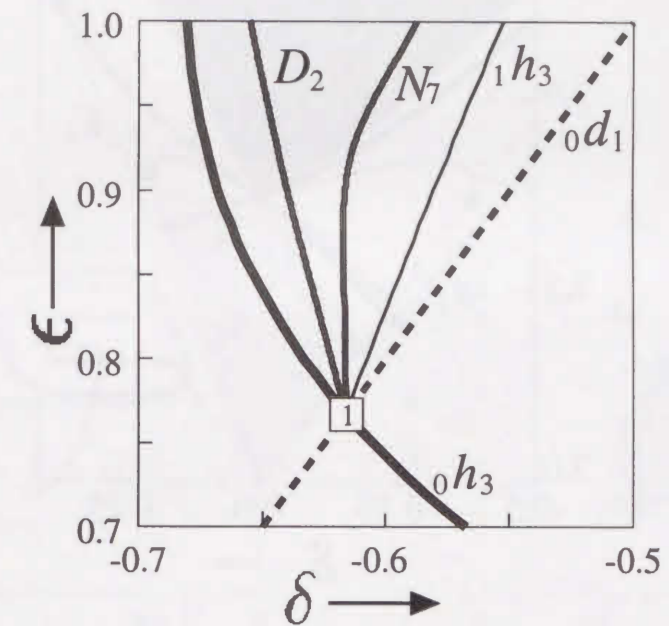


図 4.4.6: D 型分岐集合 $0d_1$ と Hopf 分岐集合 $0h_3$ の交わりによる余次元 3 の分岐点 (四角) 付近での分岐図.

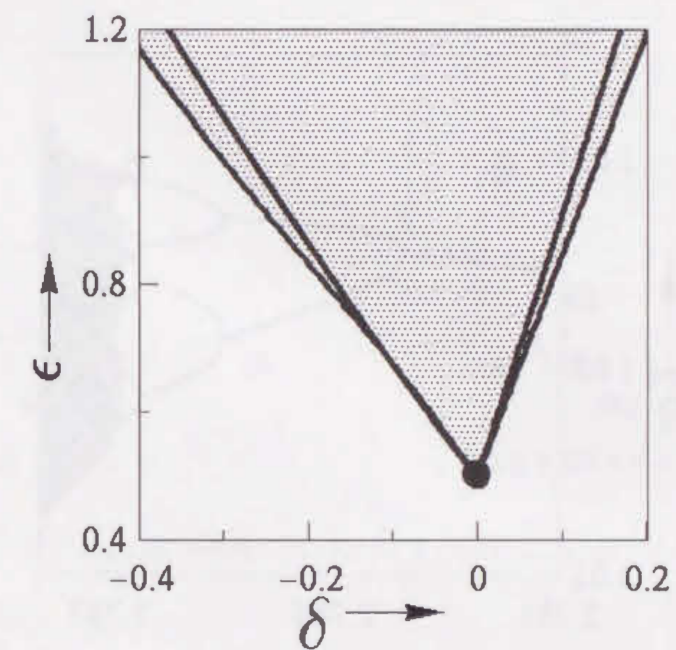


図 4.4.7: 反転対称解の発生する接線分岐集合. 影をつけた領域において反転対称解が存在する. 黒丸はカusp 点を表し, 図 4.4.2 の $0h_k$ ($k=1, 2, 3$) の交点 $(0, 0.5)$ に位置する.

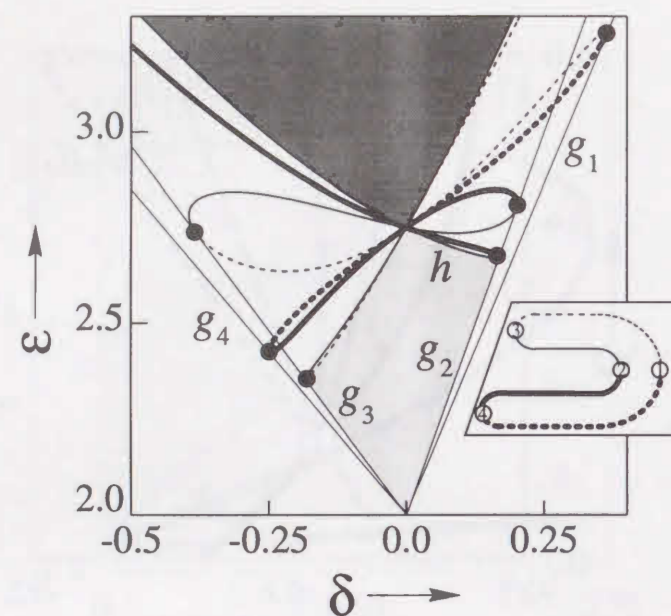


図 4.4.8: 対称性のない平衡点の分岐図. g は接線分岐集合, 他は Hopf 分岐集合を表す. 台形の中は平衡点の多様体を示す. ① から ④ はそれぞれ接線分岐 g_1 から g_4 に対応する.

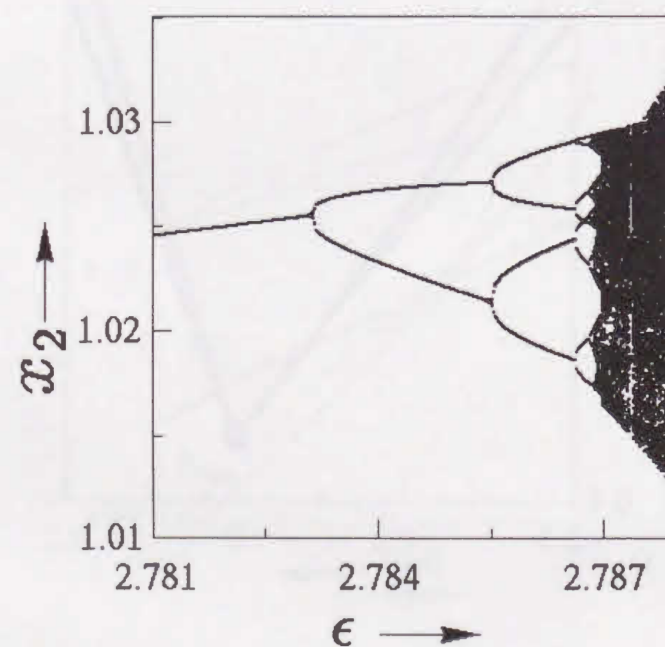
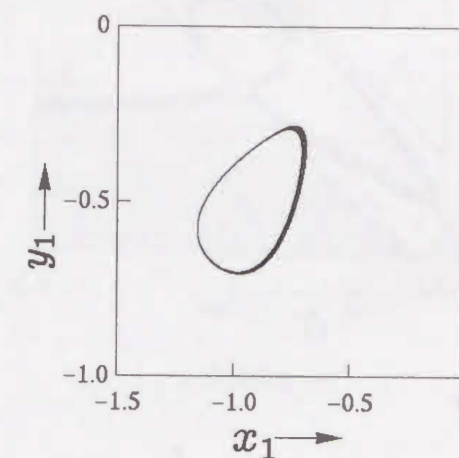
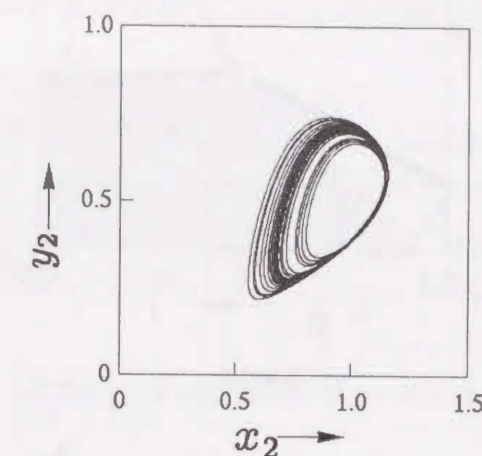


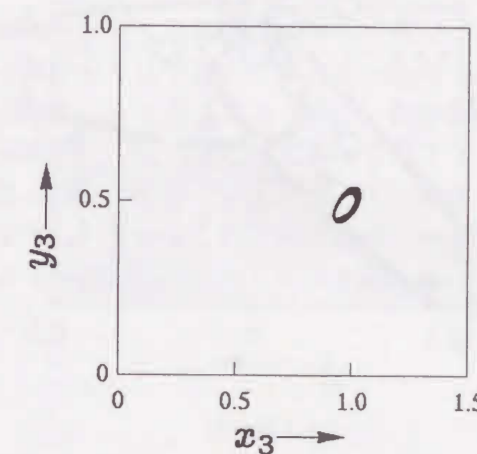
図 4.4.9: 図 4.4.8 の Hopf 分岐 h により発生した周期解の 1 パラメータ分岐図. 縦軸は x_2 のポアンカレ断面 ($y_2 = 0$) による点を表す.



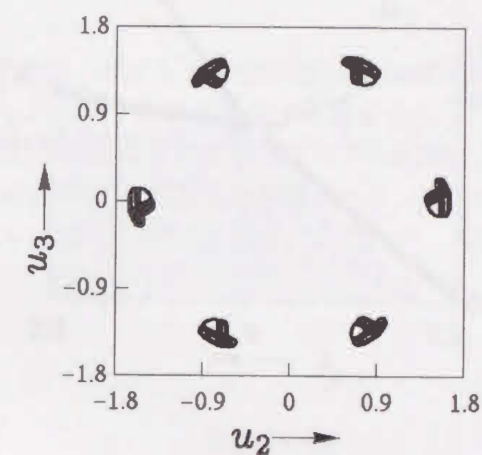
(a) 発振器 1.



(b) 発振器 2.



(c) 発振器 3.



(d) 6 個のカオス・リベラ.

図 4.4.10: 対称性のないカオス. $\delta = 0.06$, $\epsilon = 2.788$.

4.4.1.3 発振器の個数と単体の発振器の特性の関係

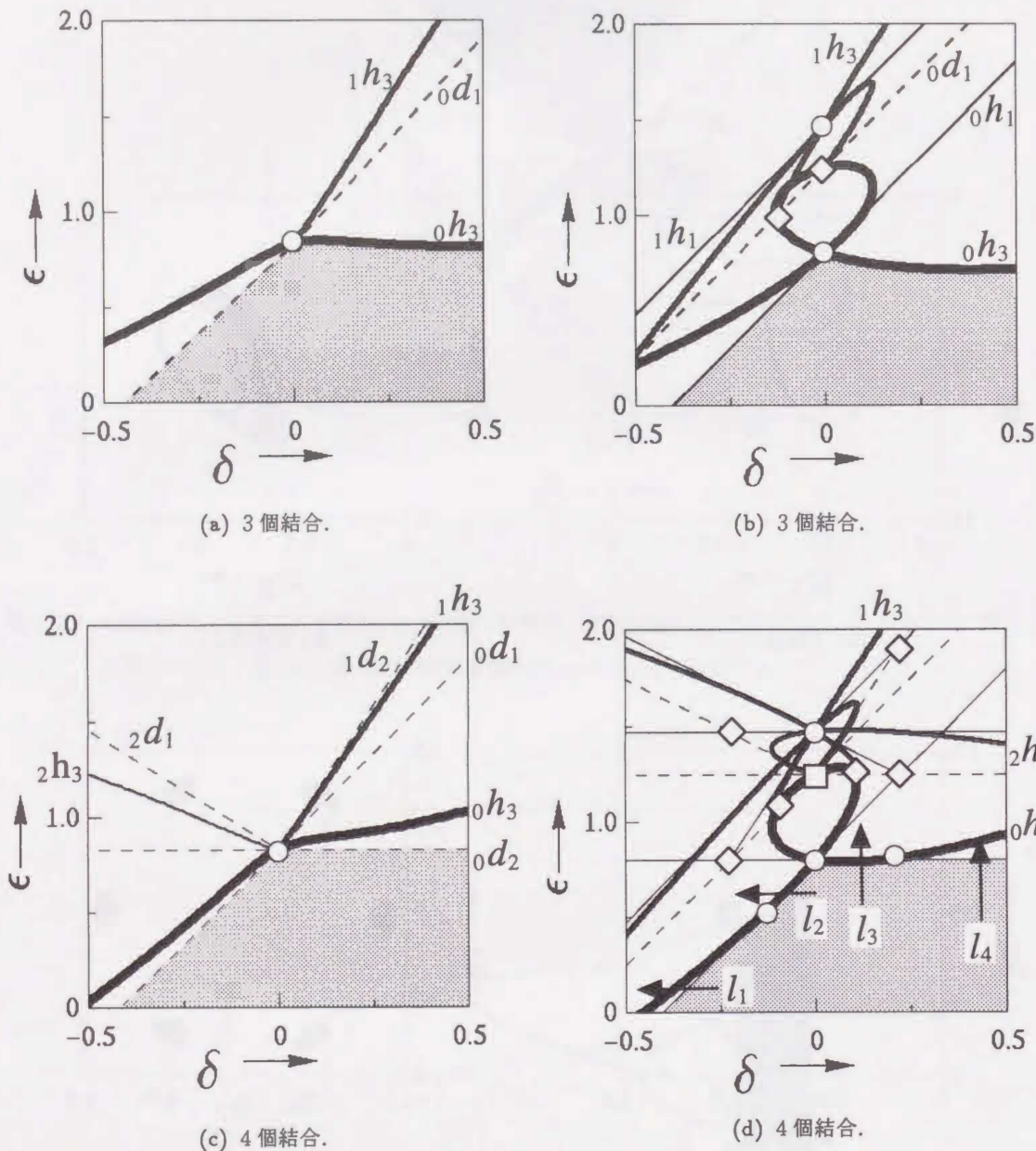


図 4.4.11: 単体の発振器が平衡点のみをもつ場合 (a) (c) と、周期解をもつ場合 (b) (d) の分岐構造の比較.

発振器の個数が3個と4個の場合について、単体の発振器が発振するかどうかで平衡点の分岐構造がどのように変化するかを図4.4.11に示す。いずれも影をつけた領域で平衡点(原点)が安定に存在する。単体の発振器が平衡点のみしかもたない場合(図4.4.11(a)と(c))は、 $\delta = 0$ 軸上での分岐集合の交点は1点となる。一方、周期解をもつ場合(図4.4.11(b)と(d))は、 $\delta = 0$ 軸上での分岐集合の交点は3点となり、分岐構造は複雑となる。

3個結合では、単体が発振しない場合(a)でも、Hopf分岐 $0h_3$ を横切ることにより、安定な三相発振が得られる。単体が発振する場合(b)は三相発振に加えて、Hopf分岐 $0h_1$ を横切るこ

4.4. 単体の発振器が発振する場合での結合

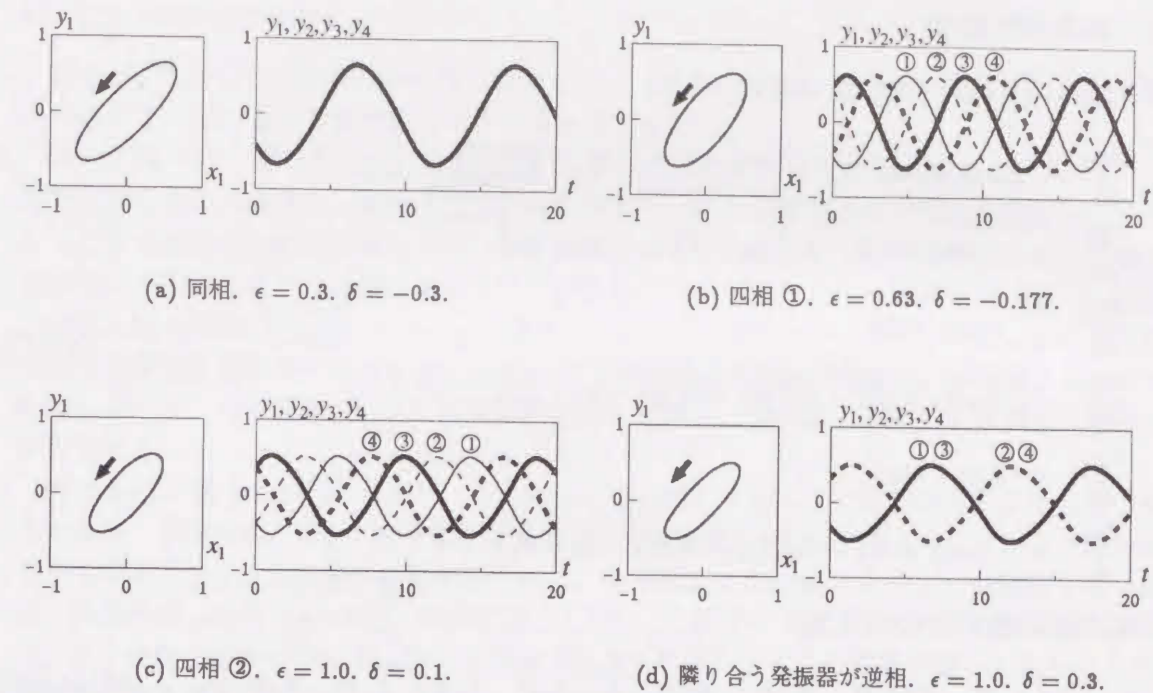


図 4.4.12: 一方向に4個の発振器を結合した回路で得られる発振状態.

とにより安定な同相発振も得られる。

4個結合では単体が発振しない場合(c)は、平衡点(原点)が安定に存在する領域がD型分枝 $0d_1$ と $0d_2$ に囲まれるために、安定な発振は得られない。単体が発振する場合(d)は影をつけた領域から、 l_1, l_2, l_3, l_4 に沿ってパラメータを変化させることにより、それぞれ同相、四相(位相差 $\pi/2$)、四相(位相差 $3\pi/2$)、隣合う発振器が逆相の安定な発振が得られる。双方向性結合では得られなかった四相解[28]が、一方向性結合にすることにより簡単に得られる。相図と波形を図4.4.12(a)~(d)に示す。

4.4.2 双方向性結合

系を記述する方程式 (4.2.8) は次式となる.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \omega y_1 - \sigma x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\omega x_1 + \epsilon(1 - \beta y_1^2)y_1 - \delta(2y_1 - y_3 - y_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \omega y_2 - \sigma x_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\omega x_2 + \epsilon(1 - \beta y_2^2)y_2 - \delta(2y_2 - y_1 - y_3) \\ \frac{dx_3}{dt} &= \omega y_3 - \sigma x_3 \\ \frac{dy_3}{dt} &= -\omega x_3 + \epsilon(1 - \beta y_3^2)y_3 - \delta(2y_3 - y_2 - y_1)\end{aligned}\quad (4.4.7)$$

系の対称性を記述する式 (4.2.10) として

$$\Gamma_2 = \{I_6, P_1, P_1^2, P_2, P_1P_2, P_1^2P_2, \bar{I}_6, \bar{I}_6P_1, \bar{I}_6P_1^2, \bar{I}_6P_2, \bar{I}_6P_1P_2, \bar{I}_6P_1^2P_2\} \quad (4.4.8)$$

を得る. 共役類は

$$\{I_6\}, \{P_1, P_1^2\}, \{P_2, P_1P_2, P_1^2P_2\}, \{\bar{I}_6\}, \{\bar{I}_6P_1, \bar{I}_6P_1^2\}, \{\bar{I}_6P_2, \bar{I}_6P_1P_2, \bar{I}_6P_1^2P_2\} \quad (4.4.9)$$

となる. パラメータは次の値に固定した.

$$c_3 = 1/3, \beta = 1.0, \omega = 1.0, \sigma = 0.8 \quad (4.4.10)$$

$\sigma < 1$ であることより, 単体の発振器は発振を起こす.

4.4.2.1 平衡点の分類

対称性により平衡点を分類すると表 4.4.4 を得る. なお, 式 (4.4.10) のパラメータ値においては, 対称性なしの平衡点を観測することができなかった.

表 4.4.4: 対称性による平衡点の分類.

平衡点の名称	等方化部分群	個数	座標
完全対称 (0)	Γ_2	1	(0, 0, 0)
C_3 不変 (1)	C_3	2	(a, a, a)
P_2 不変 (2)	P_2	3	(a, b, b)
\bar{P}_2 不変 (3)	\bar{I}_6P_2	6	(a, 0, -a)
対称性なし	I_6	12	(a, b, c)

4.4. 単体の発振器が発振する場合での結合

4.4.2.2 平衡点の分岐

表 4.4.4 に示した平衡点の分岐図を図 4.4.13 と 4.4.14 に示す. 表 4.4.5 に図 4.4.13 と 4.4.14 中の分岐によりどのような解が発生するのかをまとめる.

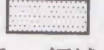
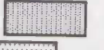
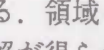
図 4.4.13 では, 領域  と  においてそれぞれ完全対称平衡点 (原点) と C_3 不変平衡点が安定に存在する. 領域  からパラメータ ϵ を増加させて Hopf 分岐 $0h_1$ を横切ることにより安定な同相解が得られる. δ を減少させて Hopf 分岐 $0h_2$ を横切ることにより, 原点は 4 次元的に不安定となり, 相順の違う 2 つの安定な三相解が得られる (図 4.4.15 (a) と (b)).

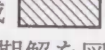
図 4.4.14 の領域  では P_2 不変平衡点が安定に存在する. Hopf 分岐 $3h_1$ により発生した完全不安定な周期解を図 4.4.15 (c) に示す. 発振器 2 の発振が停止し, 発振器 1 と 3 が逆相で同期している. 対称操作 P_1, P_2^2 により発振器 1 が停止, 発振器 3 が停止する場合の合計 3 種類が存在する.

図 4.4.13 と図 3.6.1 を比べると, 分岐構造が全く同じであることがわかる. これは双方向性結合の場合, 完全対称と C_3 不変平衡点は, ヤコビ行列が式 (4.3.19) のようにブロック対角化されるからである. B_1 の部分が重複するために, 発振器が 2 個の場合と同じ分岐構造を部分的にもつ. D 型分枝 $0d_2$ と $1d_2$ が B_1 の固有値により起こるので, 一度の分岐で 2 種類の解が発生したり, 全く発生しなかったりする特異な現象が観測される. これらの現象を詳しく解析するために, 次の対称性を崩した系の (δ, J) パラメータ平面での分岐を考える.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \omega y_1 - \sigma x_1 + J \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\omega x_1 + \epsilon(1 - \beta y_1^2)y_1 - \delta(2y_1 - y_3 - y_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \omega y_2 - \sigma x_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\omega x_2 + \epsilon(1 - \beta y_2^2)y_2 - \delta(2y_2 - y_1 - y_3) \\ \frac{dx_3}{dt} &= \omega y_3 - \sigma x_3 \\ \frac{dy_3}{dt} &= -\omega x_3 + \epsilon(1 - \beta y_3^2)y_3 - \delta(2y_3 - y_2 - y_1)\end{aligned}\quad (4.4.11)$$

$\epsilon = 0.5$ と $\epsilon = 2.0$ での $0d_2$ 付近での分岐図を図 4.4.16 と 4.4.17 に示す. 図 4.4.16 で $J = 0$ 軸上において δ を変化させれば

$$2O_0 + 24O_2 + 23O_3 \Leftrightarrow 4O_0 \quad (4.4.12)$$

となる. ここで左下添字は平衡点の不安定次元を, 右下添字は表 4.4.4 で示された平衡点の種類を示す. 一方, 図 4.4.17 で $J = 0$ 軸上を δ を変化させれば

$$3O_0 + 24O_2 + 25O_3 \Leftrightarrow 5O_0 \quad (4.4.13)$$

となる. すなわち図 4.4.13 中の D 型分枝 $0d_2$ は Hopf 分岐 $0h_1$ との交点を境にして, 上側では式 (4.4.12), 下側では式 (4.4.13) の分岐が起こる. いずれの場合も (δ, J) 平面で見ると, 接線分岐と D 型分枝集合の交点となっていることより, 一度に 2 種類の平衡点が発生し, O_0 は 2 次元的に不安定次元が変化する.

$\epsilon = 2.0$ での $1d_2$ 付近での分岐図を図 4.4.18 に示す. $J = 0$ 軸上において δ を変化させれば

$$2O_1 + 33O_2 + 32O_3 \Leftrightarrow 4O_1 + 32O_2 + 33O_3 \quad (4.4.14)$$

となる。すなわち図 4.4.13 中の D 型分枝 $1d_2$ では, C_3 不変平衡点 (式 (4.4.14) の O の右下添字 1) の不安定次元は 2 から 4 へと変化するが新たな解の発生はみられない。2 次元写像を 3 個結合した系においても全く同じ分岐構造が報告されている [29]。このように双方向性結合系にみられる分岐現象は, 一度に 2 種類の解が発生したり, 分岐条件を満たしながら新たな解の発生がなかったり, 非常に退化した現象となる。

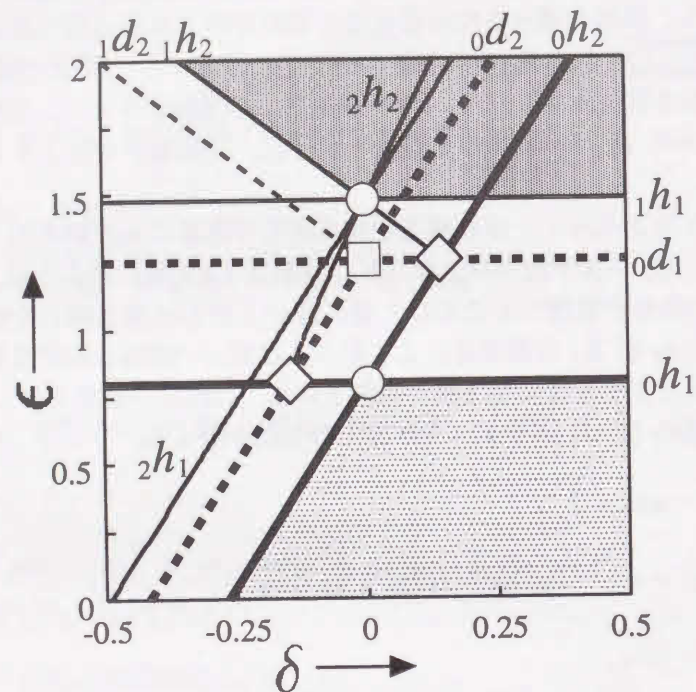


図 4.4.13: 平衡点の分岐図。白丸, 四角, 菱形はそれぞれ Hopf-Hopf, D-type-D-type, Hopf-D-type 分岐を表す。

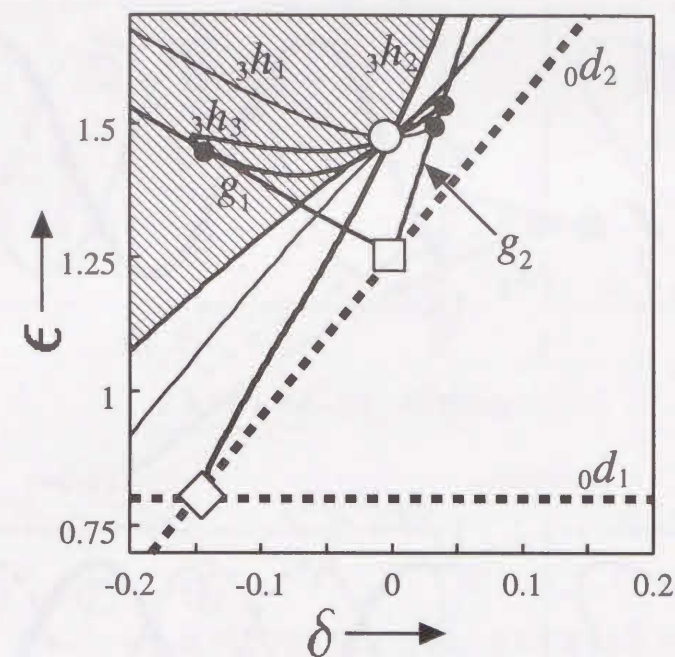


図 4.4.14: 平衡点の分岐図。黒丸は接線分岐と Hopf 分岐の交点を表す。 g_1 と g_2 で囲まれた領域で, 3 種類の P_2 不変平衡点が存在し, 合計で系としては最大の 27 個の平衡点が存在する。

表 4.4.5: 図 4.4.13 と 4.4.14 に示された分岐。

図中での記号	分岐
$0d_1$	原点 $\Leftrightarrow C_3$ 不変
$0d_2$	原点 $\Leftrightarrow P_2$ 不変, \bar{P}_2 不変
$1d_2$	C_3 不変 $\Leftrightarrow C_3$ 不変 (発生なし)
$0h_1$	原点 \Leftrightarrow 同相
$0h_2$	原点 \Leftrightarrow 三相 ① ②
$1h_1$	C_3 不変 \Leftrightarrow ずれた同相
$1h_2$	C_3 不変 \Leftrightarrow ずれた三相 ① ②
$3h_1$	P_2 不変 \Leftrightarrow 図 4.4.15(c) の周期解

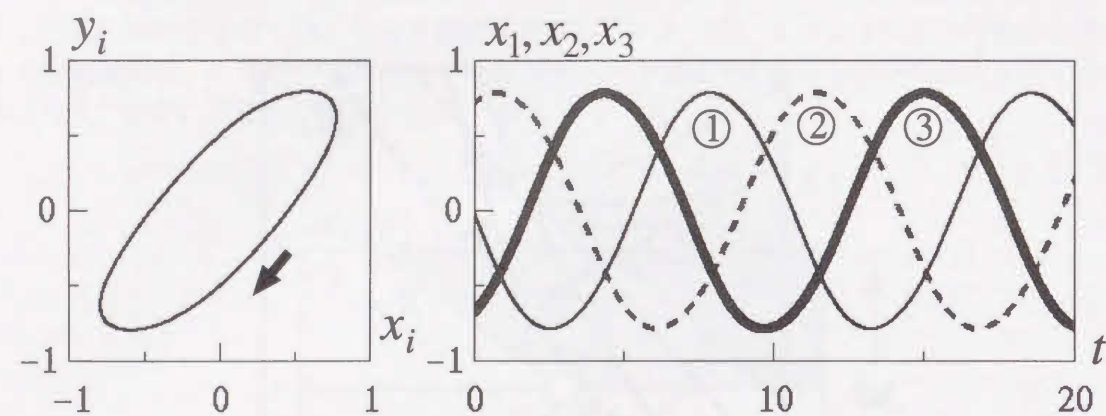
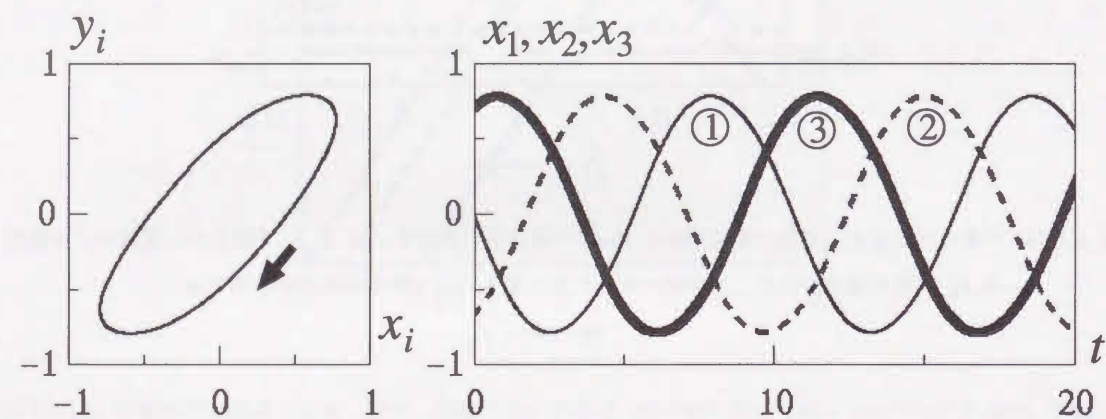
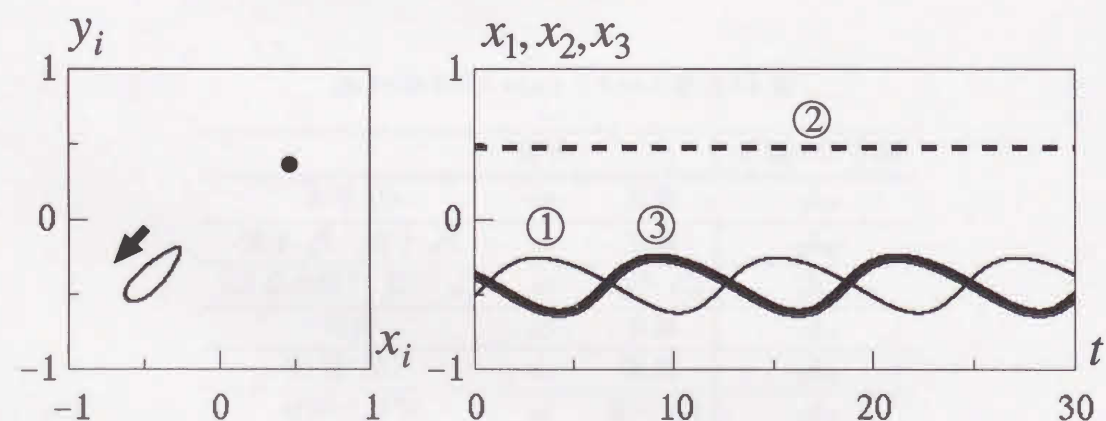
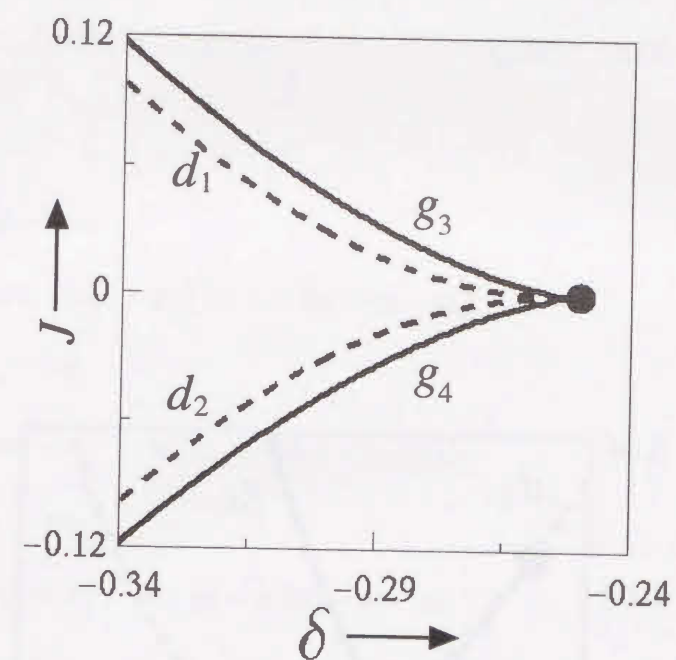
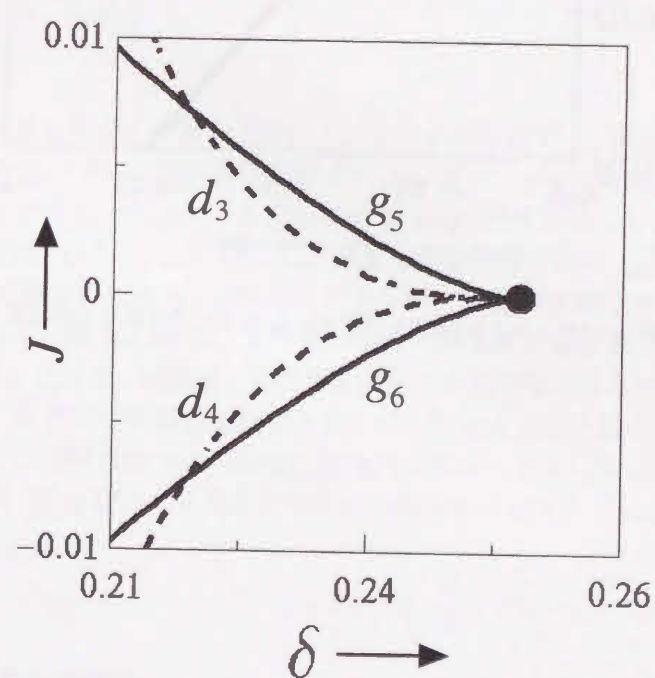
(a) 三相 ①. $\delta = -0.2$. $\epsilon = 0.4$.(b) 三相 ②. $\delta = -0.2$. $\epsilon = 0.4$.(c) 発振停止. $\delta = 0.02$. $\epsilon = 1.547$.

図 4.4.15: 相平面図と振動波形.

図 4.4.16: $\epsilon = 0.5$. 図 4.4.13 中の ${}_0d_2$ 付近での平衡点の分岐図. 黒丸は図 4.4.13 中での ${}_0d_2$ を表す.図 4.4.17: $\epsilon = 2.0$. 図 4.4.13 中の ${}_0d_2$ 付近での平衡点の分岐図. 黒丸は図 4.4.13 中での ${}_0d_2$ を表す.

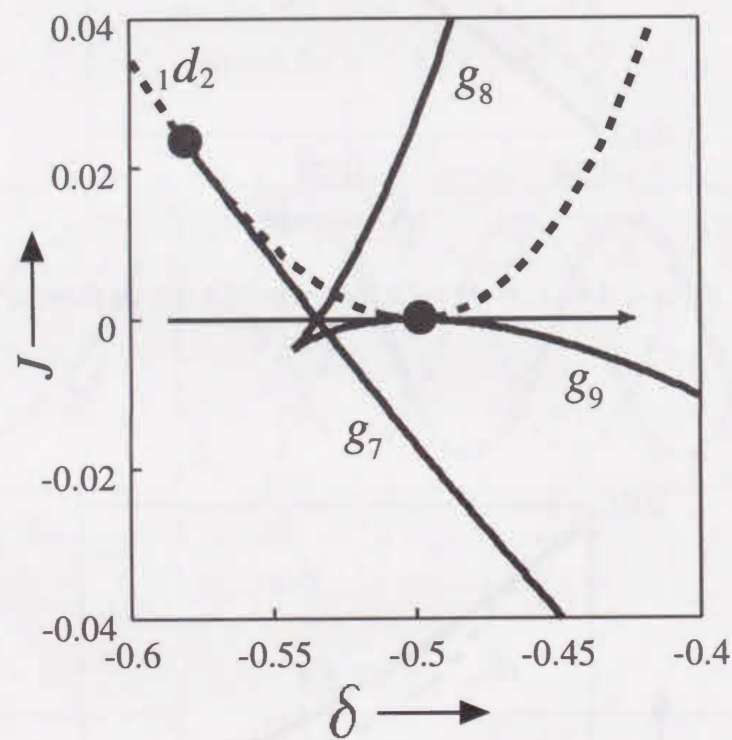


図 4.4.18: $\epsilon = 2.0$. 図 4.4.13 中の $1d_2$ 付近での平衡点の分岐図.

4.4.2.3 発振器の周波数が異なる場合

3 個の発振器を双方向に結合した回路において, 1 つの発振器の周波数を変えた場合の解析結果を示す. 回路方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= \omega_1 y_1 - \sigma x_1 \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -\omega_1 x_1 + \epsilon(1 - \beta y_1^2)y_1 - \delta(2y_1 - y_2 - y_3) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= \omega_2 y_2 - \sigma x_2 \\
 \frac{dy_2}{dt} &= -\omega_2 x_2 + \epsilon(1 - \beta y_2^2)y_2 - \delta(2y_2 - y_3 - y_1) \\
 \frac{dx_3}{dt} &= \omega_3 y_3 - \sigma x_3 \\
 \frac{dy_3}{dt} &= -\omega_3 x_3 + \epsilon(1 - \beta y_3^2)y_3 - \delta(2y_3 - y_1 - y_2)
 \end{aligned}
 \tag{4.4.15}$$

となる. パラメータの値は $\omega = 1.0$, $\omega_1 = 1.2$, $\sigma = 0.8$, $\beta = 1.0$ に固定した. 系の対称性を記述する式 (4.2.10) として

$$\Gamma_3 = \{I_6, P_2, \bar{I}_6, \bar{I}_6 P_2\}
 \tag{4.4.16}$$

を得る. 全て同じ発振器を結合した場合と比べて, 回転対称を表す P_1 が存在しない. 対称性の一番強い平衡点である原点の Hopf 分岐集合を図 4.4.19 に示す. 影をつけた領域において安定に存在する. その領域からパラメータ (δ, ϵ) を変化させて Hopf 分岐集合 $0h_1$ と $0h_2$ を横切ることにより, それぞれ図 4.4.20 (a) と (b) に示した安定な発振が得られる. $0h_1$ は同一の発振器を結合した場合の同相解が発生する Hopf 分岐に対応するが, 1 個の発振器の周波数が異なるために完全に同相とはならない. 図 4.4.20 (a) より発振器 1 の解軌道が発振器 2 と 3 と比べて, ずれていることがわかる. $0h_2$ により, 発振器 1 の発振が停止する周期解が得られる. 1 つの発振器の発振が停止する現象は, 結合する発振器の周波数を 1 つだけ変えたときにみられる普遍的な現象であると思われる [30]. この解は同一の発振器を双方向に結合した系においても存在するが, 原点からずれた平衡点の Hopf 分岐により発生するので反転対称とはならず, かつ不安定であった.

4.4.2.4 結合係数の異なる場合

対称性が, 上記の発振器の周波数が異なる場合 (4.4.16) と同じ系として, 1 つの結合係数が異なる系:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \omega y_1 - \sigma x_1 \\
\frac{dy_1}{dt} &= -\omega x_1 + \epsilon(1 - \beta y_1^2)y_1 - \delta(2y_1 - y_2 - y_3) \\
\frac{dx_2}{dt} &= \omega y_2 - \sigma x_2 \\
\frac{dy_2}{dt} &= -\omega x_2 + \epsilon(1 - \beta y_2^2)y_2 - \delta(y_2 - y_1) - \delta_1(y_2 - y_3) \\
\frac{dx_3}{dt} &= \omega y_3 - \sigma x_3 \\
\frac{dy_3}{dt} &= -\omega x_3 + \epsilon(1 - \beta y_3^2)y_3 - \delta(y_3 - y_1) - \delta_1(y_3 - y_2)
\end{aligned}
\tag{4.4.17}$$

を考える。パラメータの値は $\omega = 1.0$, $\sigma = 0.8$, $\beta = 1.0$ に固定した。平衡点(原点)の Hopf 分岐集合を δ_1 が正と負の場合にわけて図 4.4.21 と 4.4.23 に示す。図 4.4.21 では、影をつけた領域からパラメータを変化させ ${}_0h_1$ を横切ることにより安定な同相解(図 4.4.22 (a))が、 ${}_0h_3$ を横切ることにより発振器 2 と 3 が同相同期する発振が得られる(図 4.4.22 (b))。 δ_1 を負とした場合は(図 4.4.23), ${}_0h_2$ が下がってくることにより、3 種類の安定な発振が原点の Hopf 分岐により得られる: ${}_0h_1$ と ${}_0h_3$ により、 δ_1 が正の場合と同じ同相解と発振器 2 と 3 が同相同期する解が得られ(図 4.4.24 (a) と (b)), ${}_0h_2$ により発振器 1 の発振が停止する解が得られる(図 4.4.24 (c))。

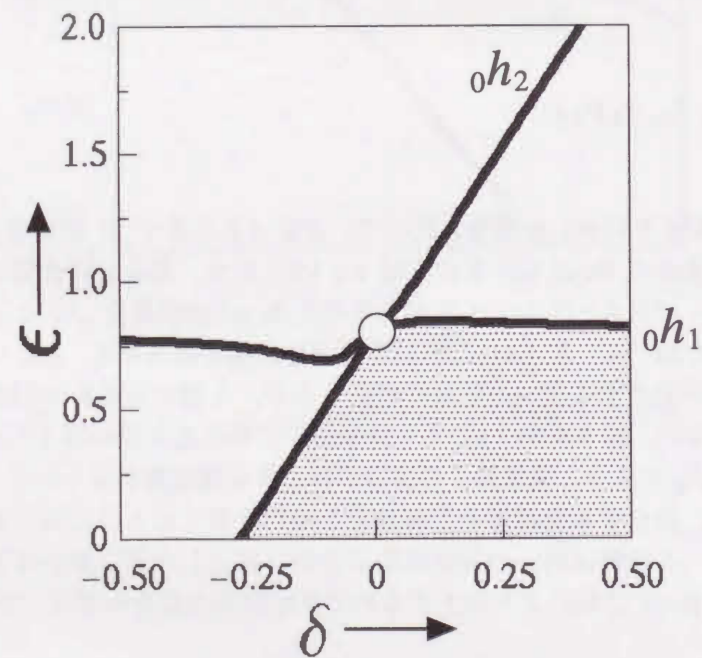


図 4.4.19: 1 個の発振器の周波数が異なる系 (4.4.15) の平衡点(原点)の Hopf 分岐集合。

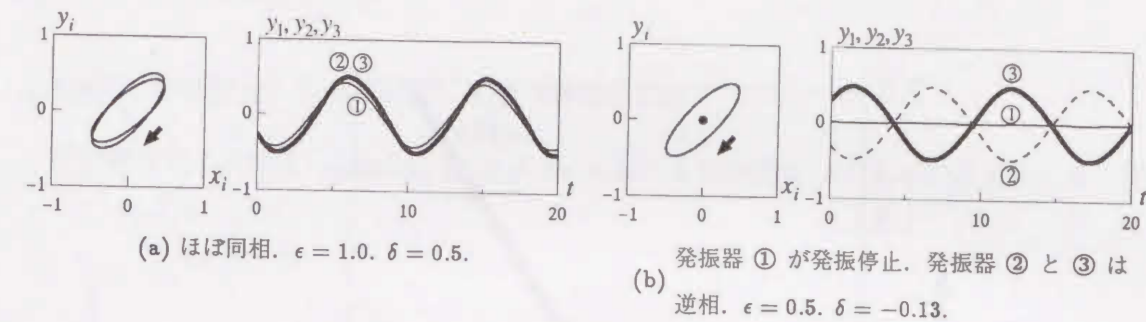


図 4.4.20: 原点の Hopf 分岐により得られる安定な発振。

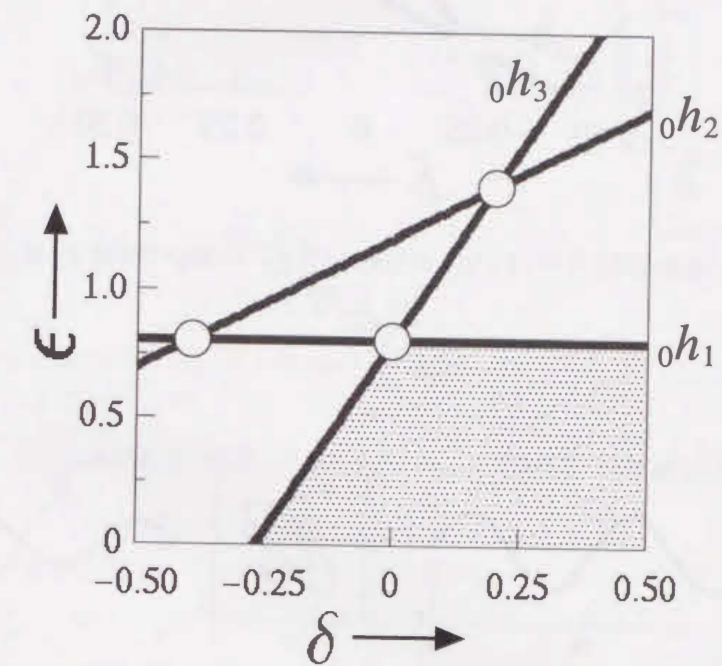


図 4.4.21: 1 つの結合係数が異なる系 (4.4.17) の平衡点(原点)の Hopf 分岐集合。 $\delta_1 = 0.2$ 。

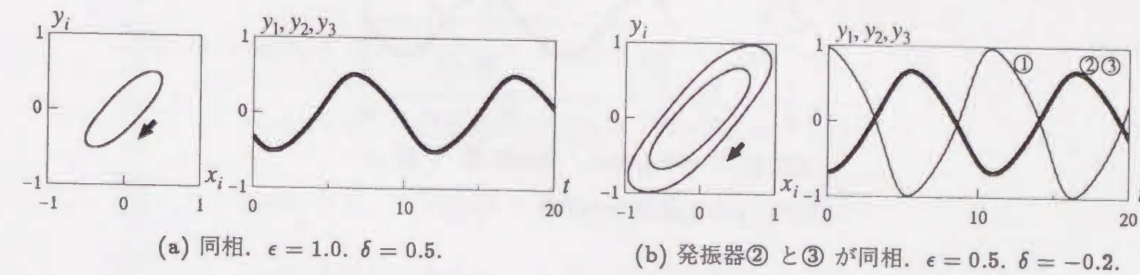


図 4.4.22: 相図と波形。 $\delta_1 = 0.2$ 。

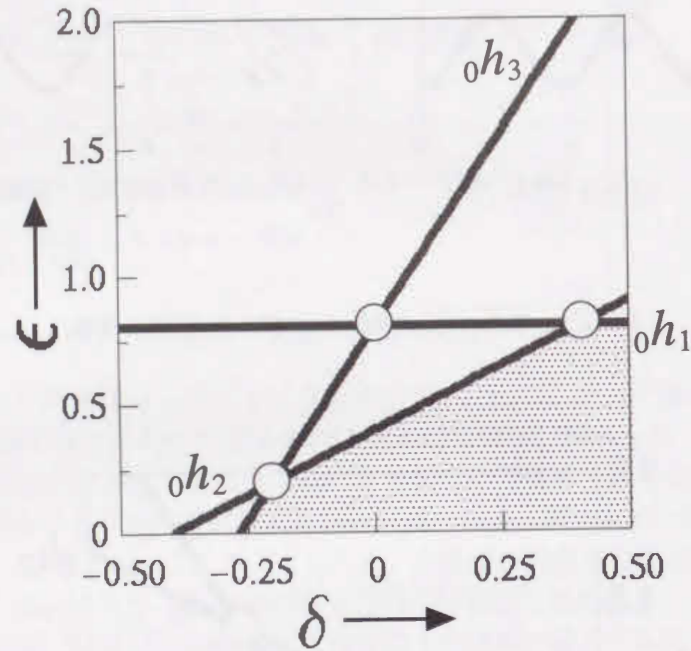


図 4.4.23: 1つの結合係数が異なる系 (4.4.17) の平衡点 (原点) の Hopf 分岐集合. $\delta_1 = -0.2$.

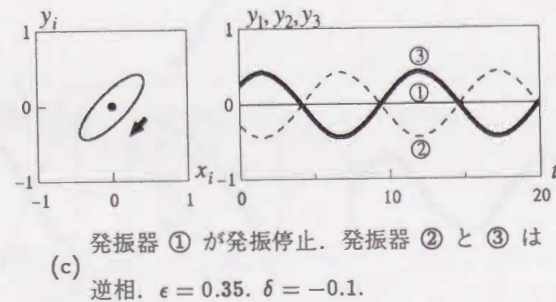
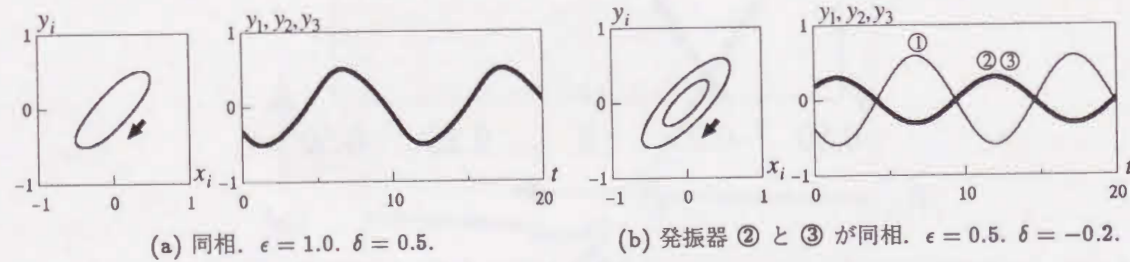


図 4.4.24: 相図と波形. $\delta_1 = -0.2$.

4.4.3 その他の結合方式

4.4.3.1 結合部分に2面体群 D_3 をもつ発振器回路

結合部分に2面体群 (dihedral group) D_3 対称をもつ回路として図 4.4.25 を考える. 回路方程

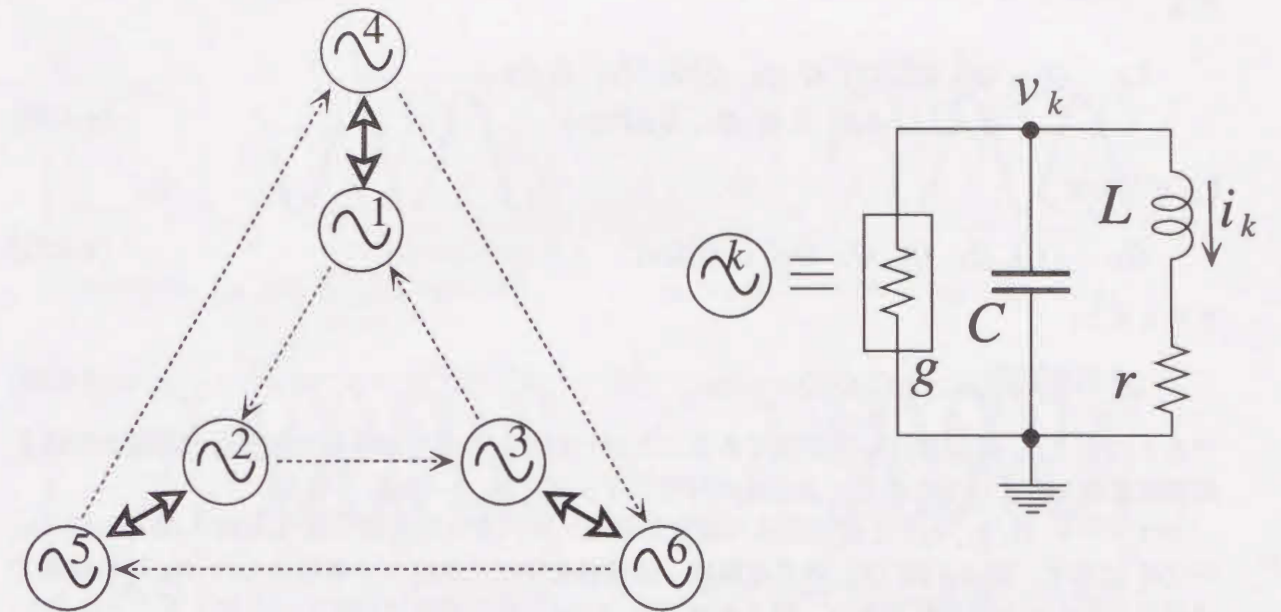


図 4.4.25: D_3 実現回路. 点線は一方方向性, 実線は双方方向性結合を示す.

式は式 (4.4.18) で表される.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_k}{dt} &= \omega y_k - \sigma x_k \quad (k = 1, \dots, 8) \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -\omega x_1 + \epsilon(1 - \beta y_1^2)y_1 - \delta_1(y_1 + y_3) - \delta_2(y_1 - y_4) \\
 \frac{dy_2}{dt} &= -\omega x_2 + \epsilon(1 - \beta y_2^2)y_2 - \delta_1(y_2 + y_1) - \delta_2(y_2 - y_5) \\
 \frac{dy_3}{dt} &= -\omega x_3 + \epsilon(1 - \beta y_3^2)y_3 - \delta_1(y_3 + y_2) - \delta_2(y_3 - y_6) \\
 \frac{dy_4}{dt} &= -\omega x_4 + \epsilon(1 - \beta y_4^2)y_4 - \delta_1(y_4 + y_5) - \delta_2(y_4 - y_1) \\
 \frac{dy_5}{dt} &= -\omega x_5 + \epsilon(1 - \beta y_5^2)y_5 - \delta_1(y_5 + y_6) - \delta_2(y_5 - y_2) \\
 \frac{dy_6}{dt} &= -\omega x_6 + \epsilon(1 - \beta y_6^2)y_6 - \delta_1(y_6 + y_4) - \delta_2(y_6 - y_3)
 \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

パラメータは $\omega = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\sigma = 0.5$ に固定した. 次の行列を定義する.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 \\ I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.4.19)$$

ここで“ \cdot ”は 2×2 の零行列を表す。 Q_1 と Q_2 を用いて式(4.4.18)の対称性は次式で記述される。

$$\Gamma_D = \{I_{12}, Q_1, Q_1^2, Q_2, Q_1 Q_2, Q_1^2 Q_2, \bar{I}_{12}, \bar{I}_{12} Q_1, \bar{I}_{12} Q_1^2, \bar{I}_{12} Q_2, \bar{I}_{12} Q_1 Q_2, \bar{I}_{12} Q_1^2 Q_2\} \quad (4.4.20)$$

Γ_D の部分群：

$$G_D = \{I_{12}, Q_1, Q_1^2, Q_2, Q_1 Q_2, Q_1^2 Q_2\} \quad (4.4.21)$$

を考えると、

$$Q_1^3 = Q_2^3 = I_{12}, \quad Q_1 Q_2 Q_1 Q_2 = I_{12} \quad (4.4.22)$$

であることより、 G_D は D_3 と同型であることがわかる。ここでは単体の発振器の非線形特性を奇関数に仮定しているために、系全体の対称性 Γ_D は $\{D_3, -D_3\}$ となる。

パラメータ $(\epsilon, \delta_1, \delta_2)$ を変化させた場合に得られる、安定な発振を図4.4.26と図4.4.27(a)～(c)に示す。図4.4.26(b)の逆相解は、発振器を環状に抵抗で3個結合した D_3 対称回路では得られなかった周期解である。図4.4.26(c)と(d)の三相解は相順を入れ換えることにより、2種類存在する。しかし、同相となるペア(①と⑥、②と④、③と⑤)は不変である。パラメータ δ_2 を変化させることにより、それらの同相関係が崩れるので図4.4.26(e)と(f)に示す。図4.4.26(g)と(h)の六相解は、相順を入れ換えることにより2種類存在する。パラメータ δ_2 を変化させることにより、六相が崩れ三相解が2組できる(図4.4.26(i)と(j))。

図4.4.27(a)～(c)の反転対称解は三相となるが、振幅は全て異なる。従って発振器の入れ換えにより同相のペアが異なる3種類が存在する。同じパラメータ値において、(a)～(c)で同相であったペアが逆相となる周期解が得られる。図4.4.27(d)～(f)に相図と波形を示すが、1次元的に不安定である。

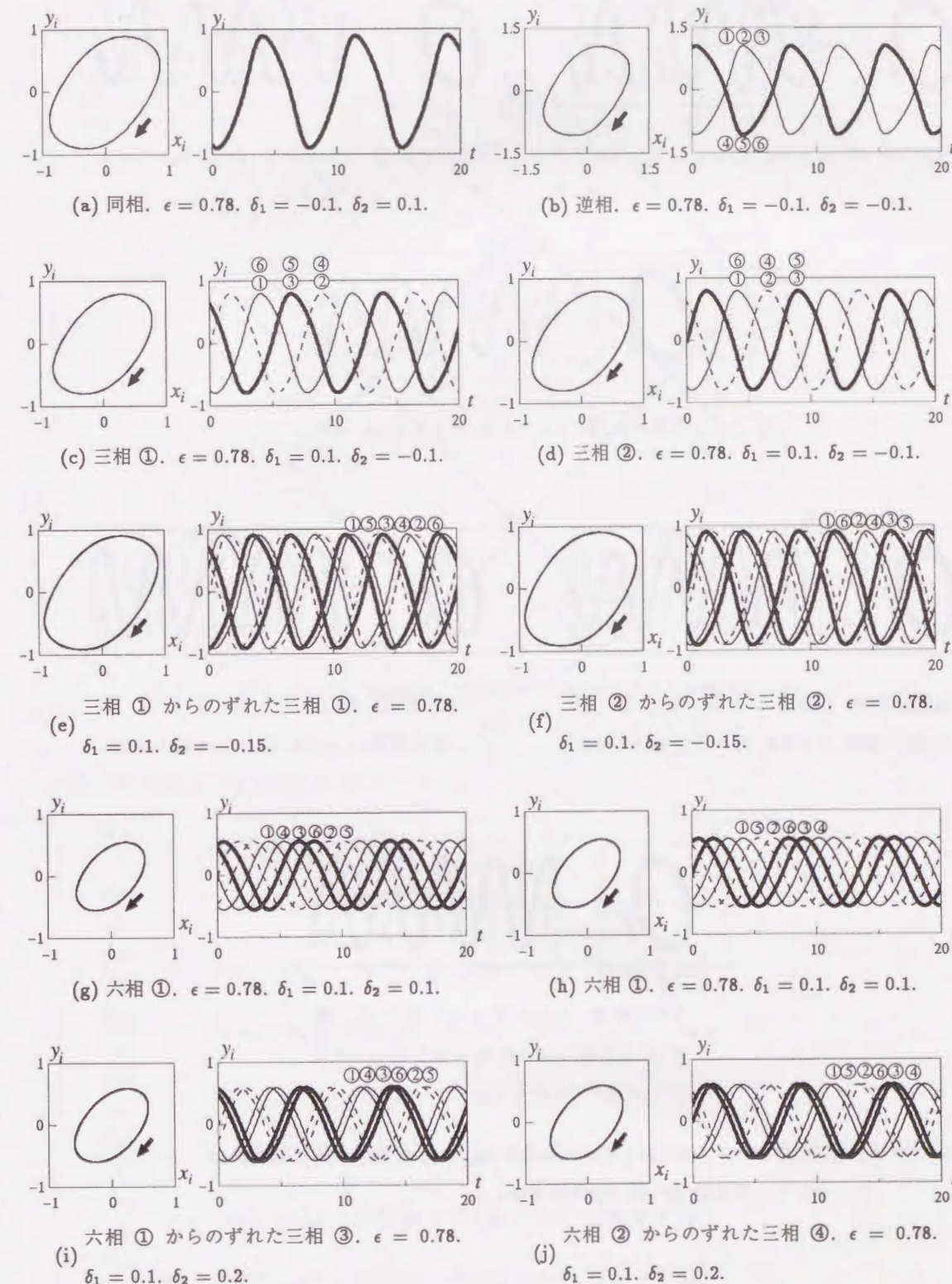


図4.4.26: D_3 実現回路において得られる安定な周期解。

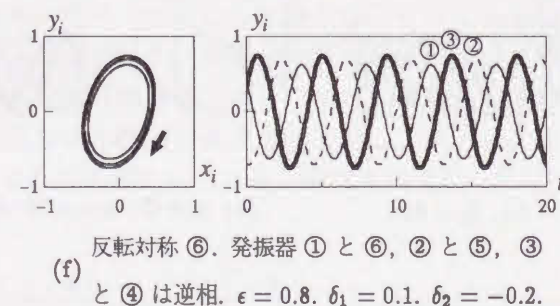
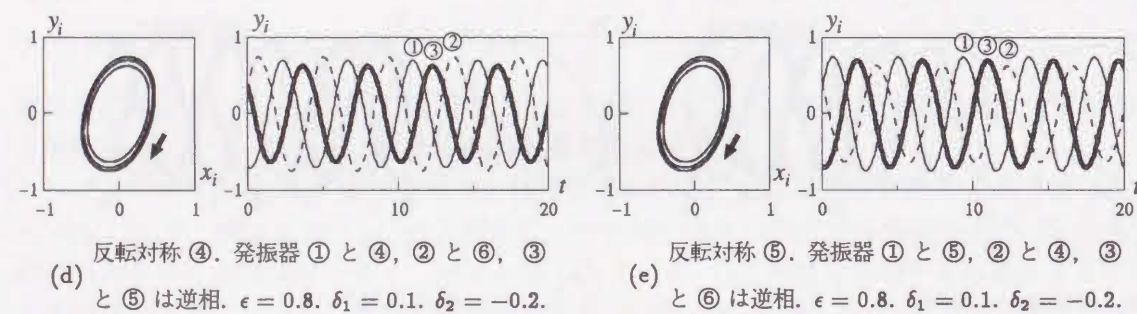
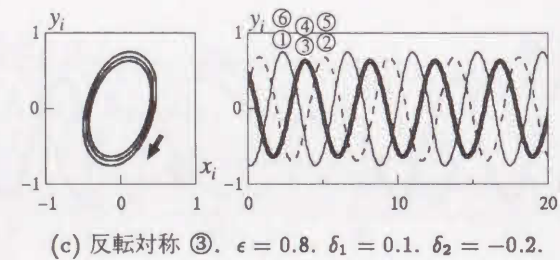
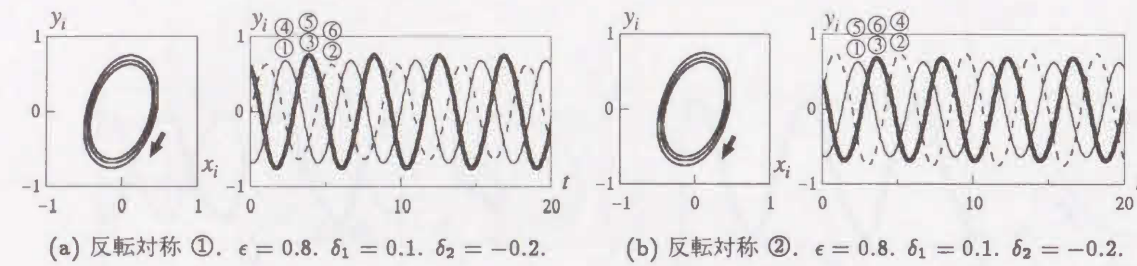


図 4.4.27: D_3 実現回路において得られる安定な周期解 (a) ~ (c) と不安定な周期解 (d) ~ (f). (d) ~ (f) において, 発振器 ④ ~ ⑥ の波形は省略した.

4.4.3.2 結合部分に4元数群 Q_8 をもつ発振器回路

4元数群 (quaternion group) Q_8 対称をもつ回路として図 4.4.28 を考える.

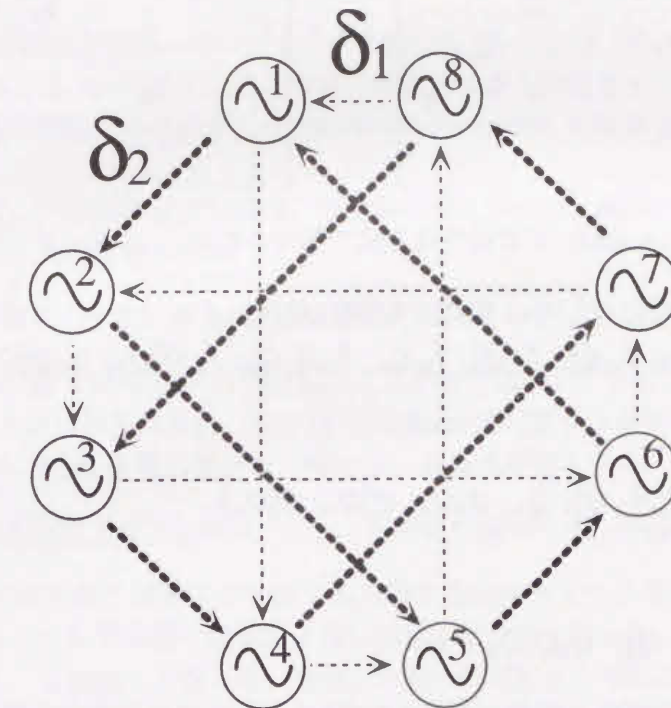


図 4.4.28: Q_8 実現回路. 発振器間の結合はすべて一方向性とする.

回路方程式は式 (4.4.23) で表される.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_k}{dt} &= \omega y_k - \sigma x_k \quad (k = 1, \dots, 8) \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -\omega x_1 + \epsilon(1 - \beta y_1^2)y_1 - \delta_1(y_1 + y_8) - \delta_2(y_1 + y_6) \\
 \frac{dy_2}{dt} &= -\omega x_2 + \epsilon(1 - \beta y_2^2)y_2 - \delta_1(y_2 + y_7) - \delta_2(y_2 + y_1) \\
 \frac{dy_3}{dt} &= -\omega x_3 + \epsilon(1 - \beta y_3^2)y_3 - \delta_1(y_3 + y_2) - \delta_2(y_3 + y_8) \\
 \frac{dy_4}{dt} &= -\omega x_4 + \epsilon(1 - \beta y_4^2)y_4 - \delta_1(y_4 + y_1) - \delta_2(y_4 + y_3) \\
 \frac{dy_5}{dt} &= -\omega x_5 + \epsilon(1 - \beta y_5^2)y_5 - \delta_1(y_5 + y_4) - \delta_2(y_5 + y_2) \\
 \frac{dy_6}{dt} &= -\omega x_6 + \epsilon(1 - \beta y_6^2)y_6 - \delta_1(y_6 + y_3) - \delta_2(y_6 + y_5) \\
 \frac{dy_7}{dt} &= -\omega x_7 + \epsilon(1 - \beta y_7^2)y_7 - \delta_1(y_7 + y_6) - \delta_2(y_7 + y_4) \\
 \frac{dy_8}{dt} &= -\omega x_8 + \epsilon(1 - \beta y_8^2)y_8 - \delta_1(y_8 + y_5) - \delta_2(y_8 + y_7)
 \end{aligned} \tag{4.4.23}$$

パラメータは $\omega = 1.0, \beta = 1.0, \sigma = 0.8$ に固定した. 行列 Q_3 と Q_4 を定義する.

$$Q_3 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 \\ I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot \\ \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_2 & \cdot \\ I_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.4.24)$$

Q_3 と Q_4 を用いて式 (4.4.23) の対称性は次式で記述される。

$$\Gamma_Q = \{I_{16}, Q_3, Q_3^2, Q_3^3, Q_4, Q_3Q_4, Q_3^2Q_4, Q_3^3Q_4, \bar{I}_{16}, \bar{I}_{16}Q_3, \bar{I}_{16}Q_3^2, \bar{I}_{16}Q_3^3, \bar{I}_{16}Q_4, \bar{I}_{16}Q_3Q_4, \bar{I}_{16}Q_3^2Q_4, \bar{I}_{16}Q_3^3Q_4\} \quad (4.4.25)$$

Γ_Q の部分群：

$$G_Q = \{I_{16}, Q_3, Q_3^2, Q_3^3, Q_4, Q_3Q_4, Q_3^2Q_4, Q_3^3Q_4\} \quad (4.4.26)$$

を考えると、

$$Q_3^4 = I_{16}, Q_3^2 = Q_4^2, Q_3Q_4Q_3 = Q_4 \quad (4.4.27)$$

であることより、 G_Q は Q_8 と同型であることがわかる。ここでは単体の発振器の非線形特性を奇関数に仮定しているために、系全体の対称性 Γ_Q は $\{Q_8, -Q_8\}$ となる。

パラメータ ($\epsilon, \delta_1, \delta_2$) を変化した場合に得られる、4 種類の安定な発振を図 4.4.29 に示す。 $\delta_1 = 0$ の場合に四相解が安定に存在するパラメータ値において、 δ_1 を少しでも入れることにより、二相モード (逆相) へと移行する。従って安定な四相および八相解は観測できなかった。(b) ~ (d) の逆相解において同相となるペア (① と ⑤, ② と ⑥, ③ と ⑦, ④ と ⑧) は不変である。

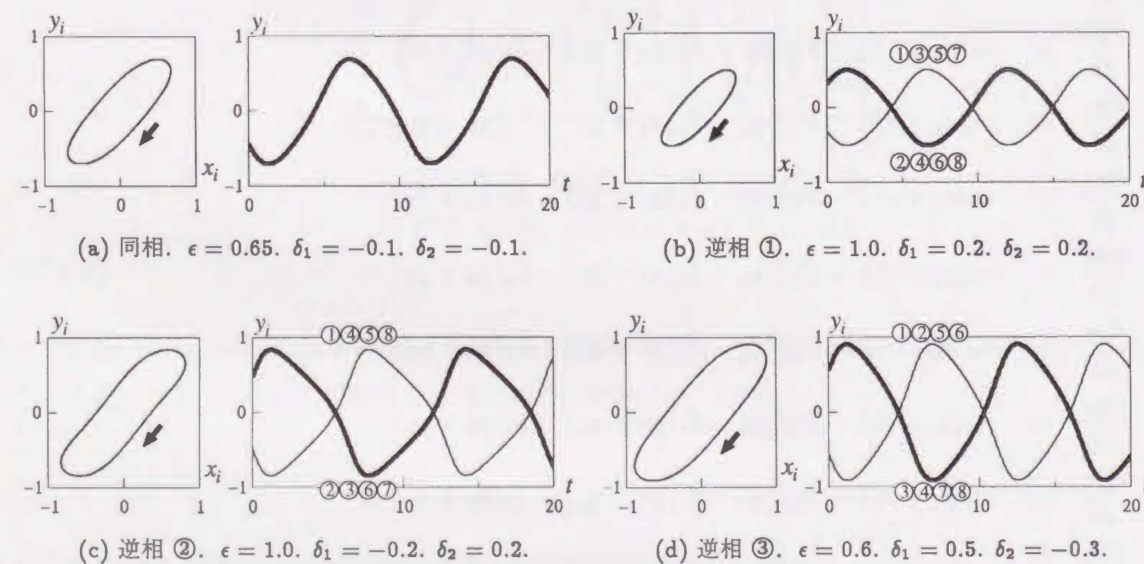


図 4.4.29: 4 元数群対称回路にみられる安定な周期解。

4.5 むすび

巡回結合した発振器系の平衡点と周期解の分岐現象を解析した。各節で得られた結果を要約すると次のとおりである。

4.3 節では単体の発振器が発振しないパラメータ値に固定し、 n 個、抵抗で環状に一方向と双方向に結合した系を考えた。対称性をもつ平衡点に対するヤコビ行列をブロック対角化することにより、特定の発振器の個数だけでなく、一般的な場合についても分岐集合が求められることを示した。

この方法を用いて、一方向と双方向結合、発振器の個数が奇数と偶数、の場合にみられる発振現象の違いを解析し、次の結果を得た。

一方向 (奇数): 平衡点 (原点) が Hopf 分岐集合を横切ることにより n 相発振が観測される。

一方向 (偶数): $n < 12$ では原点が D 型分枝により不安定になってから Hopf 分岐集合を横切するため、安定な発振は得られない。 $n \geq 12$ では Hopf 分岐集合の形状が変化し、原点は D 型分枝よりも先に Hopf 分岐に出会い、安定な n 相発振が得られる。

双方向: Hopf 分岐が存在しないために、安定・不安定に関わらず、発振は得られない。

4.4.1 と 4.4.2 節では単体の発振器が発振する状態で巡回結合した系の周期解の分岐を考えた。周期解の分岐を扱うために発振器の個数を 3 個に限定して解析を行った。対称性により平衡点と周期解をそれぞれ 3, 8 種類に分類した。分類した解の分岐集合を求めることにより、異なる対称性をもつ解の間の遷移を示した。分岐集合の数値計算において、周期倍分岐の連鎖による対称性のないカオス・リベラを観測した。

4.4.3 節では一方向と双方向の結合を混合させて結合部分に 2 面体群 D_3 と 4 元数群 Q_8 をもつ結合回路を構成した。 D_3 対称回路では 5 種類の安定な周期解と、1 つの不安定な周期解を得た。5 種類の安定な周期解のうち 1 つは、通常の発振器を 3 個結合した D_3 対称回路において得ることのできなかった逆相発振パターンであった。 Q_8 対称回路では四相または八相解は得られず、同相と逆相解を 4 種類得た。

今後の課題としては、

- 一方向性から双方向性へと結合を変化させることによる分岐現象の変化を調べること、
- D_3, Q_8 対称回路の周期解の分岐を調べること

などがある。

第5章

余次元の高い分岐とカオス

5.1 周期倍分岐と Neimark-Sacker 分岐列について

5.1.1 まえがき

近年盛んに研究されている結合発振器系、特に同一の発振器を結合した系は高次元非線形微分方程式で記述され、かつ強い対称性を持つ系となる [2,21]. このような系の分岐問題を考えるとき、一般的な分岐である余次元1の分岐がパラメータ平面で交わる余次元2の分岐や、より退化した余次元の高い分岐が起こる可能性がある。余次元2の分岐値近傍において、周期解の振舞は複雑となり、カオスへ至る場合も存在する。一般的な余次元2の分岐の分類、計算方法および近傍での周期解の位相的性質の変化などは文献 [31] に詳しい。しかし、余次元2の分岐として Neimark-Sacker 分岐が絡んだ場合の、分岐により発生する準周期解の振舞についてはあまり検討されていない。

本節では2次元非自律系で記述される、直流成分を含む周期的外力を印加した Duffing-Rayleigh 型発振器にみられる基本調波、 $1/2$ 分数調波周期解の分岐集合を数値計算により求めた。その結果、余次元2の分岐の1つである P^2 分岐の連鎖が起こりカオスへ至る分岐構造の一端を明らかにした。各周期の Neimark-Sacker 分岐により発生する準周期解が対となって消滅する現象をみいだした。

一般に Neimark-Sacker 分岐集合上で特性乗数が有理数となる特別な点の近傍では、周波数ロックに対応するさまざまな周期の分数調波同期化領域が Neimark-Sacker 分岐曲線からひげ状に派生している。このような分岐構造はアーノルドの舌と呼ばれている [18,32,33]. 基本調波および $1/2$ 分数調波周期解について、この分岐構造を計算し、領域の境界線に対応する接線分岐曲線が複雑な形状となる場合や、領域内に周期倍列の進展によるカオスのみられる場合のあることを見出した。また、文献 [34] において報告されている、 $1/2$ 分数調波振動に対する Neimark-Sacker 分岐集合近傍の性質が、基本調波振動に対する Neimark-Sacker 分岐集合近傍においても生じることを示した。

本節の結果は、一般の強制系の解析に際して (1) Neimark-Sacker 分岐曲線に沿って見られる各種分数調波同期化領域の大域的挙動や、(2) 周期倍分岐と Neimark-Sacker 分岐の交差に起因する分岐現象などを検討する場合に有益な情報を与えてくれるものと考えられる。また工学的

には、分岐集合を計算することによって、周波数ロックが生じるパラメータ領域を推定することや、同期はずれのパラメータ領域でのカオス発生メカニズムの多様性を示唆する例として役立つことができる。

5.1.2 回路方程式

図 5.1.1 の外力を印加した Duffing-Rayleigh 型発振器回路において素子特性を次式と仮定する：

$$\begin{aligned} g(v) &= -g_1 v + g_3 v^3 \\ ni &= a_1 \phi + a_3 \phi^3 \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

また電流源は直流成分を含む正弦波とする：

$$j(t) = I_0 + I_m \cos \nu t \quad (5.1.2)$$

以上の仮定より正規化された回路方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \epsilon(1 - \gamma y^2)y - c_1 x - c_3 x^3 + B_0 + B \cos \nu t \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi_m x, \quad v = n\Phi_m y, \quad \gamma = \frac{n^2 \Phi_m^2 g_3}{g_1}, \quad \epsilon = \frac{g_1}{C}, \quad c_1 = \frac{a_1}{n^2 C}, \quad c_3 = \frac{a_3 \Phi_m^2}{n^2 C} \\ B &= \frac{I_m}{nC\Phi_m}, \quad B_0 = \frac{I_0}{nC\Phi_m} \end{aligned}$$

とおき、 Φ_m は最大磁束鎖交数である。パラメータは文献 [35] と同じ値：

$$\epsilon = 0.2, \quad \gamma = 1.0, \quad c_1 = 0, \quad c_3 = 1.0$$

を選んだ。解析の方法は、ストロボ写像 T_λ を

$$T_\lambda: R^2 \rightarrow R^2; \quad (x_0, y_0) \mapsto (x(2\pi/\nu), y(2\pi/\nu)) \quad (5.1.4)$$

と定義し、式 (5.1.3) の周期解を写像 T_λ の周期点に、トーラスを不変閉曲線に対応させて考察する。従って式 (5.1.3) の周期 $2\pi m/\nu$ の周期解には写像 T_λ の m 周期点に対応する。

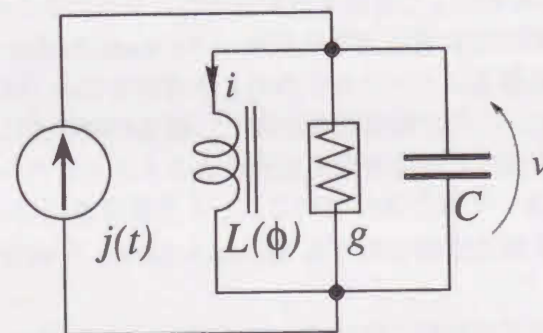


図 5.1.1: Duffing-Rayleigh 型発振器。

表 5.1.1: 余次元 1 の分岐の条件とその性質。

名称	特性乗数の値	軌道の性質
接線分岐	$\mu = 1$	周期解の発生・消滅
周期倍分岐	$\mu = -1$	周期解の分枝
Neimark-Sacker 分岐	$ \mu = 1, \mu \neq 1, -1$	準周期解の発生・消滅

5.1.3 解析結果

以下に示す分岐図において m 周期点の分岐集合として次の記号および線を用いる：

$$\begin{aligned} G_k^m &\dots \text{接線分岐 (細い実線)} \\ I_k^m &\dots \text{周期倍分岐 (細い点線)} \\ H_k^m &\dots \text{Neimark-Sacker 分岐 (太い実線)} \end{aligned}$$

ここで k は同じ周期の分岐集合を区別するために用いた。これら余次元 1 の分岐の起こる条件とその性質を表 5.1.1 にまとめておく。

5.1.3.1 パラメータ ν の決定

図 5.1.2 にパラメータ (B, B_0, ν) 空間における分岐図を示す。 $\nu = 1.0$ では Neimark-Sacker 分岐集合 H_1^1 は白丸で示した点で接線分岐集合 (図 5.1.2 では省略) と接して分岐集合の性質を失う。図 5.1.2 の太い点線は分岐集合ではなく、特性乗数の積が 1 になる集合を表し、以下の図においても同じである。 ν を増加して 1.25 にすると、Neimark-Sacker 分岐集合が周期倍分岐集合 I_1^1 と交わり、 P^2 分岐と呼ばれる余次元 2 の分岐 [36] が起こる。 $\nu = 1.5$ ではその交わり方が、周期倍分岐集合の真中を貫く。さらに ν を増加すると交点が周期倍分岐集合の左側へとずれる。図 5.1.2 と Duffing 方程式：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -ky - c_1 x - c_3 x^3 + B_0 + B \cos \nu t \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

にみられる分岐集合 [7] との相違は Neimark-Sacker 分岐の存在である¹。この分岐が存在するために式 (5.1.3) では以下の複雑な現象が観察される：

- (1) Neimark-Sacker 分岐と周期倍分岐の交わりによる P^2 分岐の連鎖によるカオス状態への遷移、
- (2) Neimark-Sacker 分岐集合付近でのさまざまな分数調波同期化領域の存在。

(2) については ν の値に無関係であるが、(1) は ν により P^2 分岐の発生の様子が異なる。従って図 5.1.2 より、Neimark-Sacker 分岐集合が周期倍分岐集合の真中を貫く $\nu = 1.5$ と選ぶ。パラメータ平面 (B, B_0) での分岐集合を数値計算により求め、上記 (1), (2) について検討する。

¹Duffing 方程式では Liouville の定理より Neimark-Sacker 分岐は存在しない。

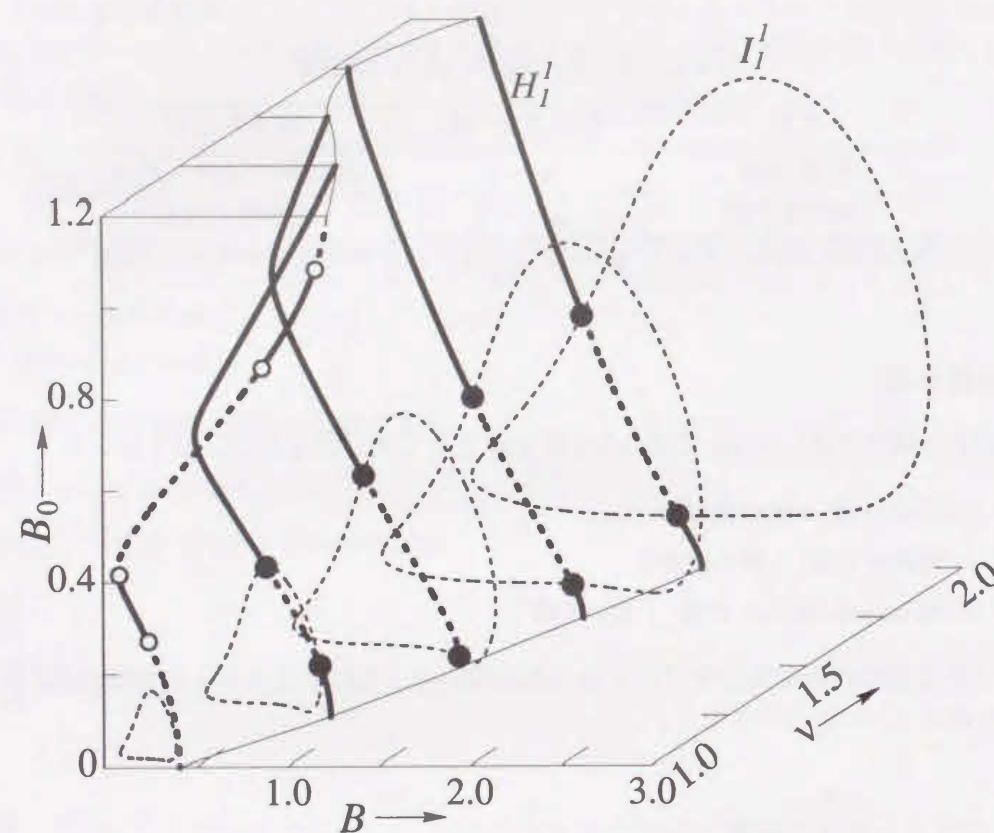


図 5.1.2: 3 パラメータ分岐図。●は周期倍分岐と Neimark-Sacker 分岐の交わりによる余次元 2 の分岐を表す。

5.1.3.2 P^2 分岐の連鎖と準周期解の分岐

図 5.1.3 に式 (5.1.3) の周期解の分岐集合を示す。固定点が周期倍分岐の連鎖によりカオスへと進展する様子がわかる。これはカオスへ至る基本的なルートで、Duffing 方程式においても存在し、分岐集合の形状は同じである。しかし、式 (5.1.3) では Neimark-Sacker 分岐集合 H^1 が存在し、それが連鎖の一番はじめの周期倍分岐集合 I^1 と交わるために図 5.1.3 の黒丸で示した点で P^2 分岐が生じる。この余次元 2 の分岐付近では倍周期の Neimark-Sacker 分岐が存在することが知られている [31, 36]。この場合、倍周期の Neimark-Sacker 分岐が H^2 であり、 H^2 が I^2 と交わることにより同様の現象が繰り返される。この P^2 分岐の連鎖が、Duffing 方程式の分岐構造とは一番異なる点で、式 (5.1.3) にみられる分岐現象の大きな特徴である。

図 5.1.4 に P^2 分岐の連鎖が起こる部分の拡大図を示す。領域 \square では安定な固定点が存在する。パラメータを変化させて周期倍分岐集合 I^1, I^2, I^4 を横切ることにより、領域 \square , \square , \square ではそれぞれ安定な 2, 4, 8 周期点が存在する。8 周期より高次の周期倍分岐列は、 I^8 のすぐ下の狭いパラメータ領域に存在するために、領域 \square から I^8 を越えたパラメータ値でカオス・アトラクタが存在する。一方、白い領域でパラメータを変化させて I^1, I^2, I^4, I^8 を横切ることにより、完全不安定固定点が倍周期化され、完全不安定カオスとなる。このカオスは式 (5.1.3) を逆時間方向に解くことにより観察できる。これら 2 つのカオスの存在領域につ

いては、図 5.1.4 の分岐図だけではわからないので、ホモクリニック軌道を求めるなど、さらなる解析が必要である。

Neimark-Sacker 分岐集合は周期が倍になる毎に上下交互に発生しており、木の枝にたとえて交互樹状パターンと呼ばれる。このパターンの発生の条件およびメカニズムについては文献 [37] に詳しい。

分岐集合 H^1 を矢印の方向に横切ることにより

$${}_2D \rightarrow {}_0D + UICC$$

と $UICC$ が発生し、 H^2 上を矢印の方向にパラメータを変化させると

$${}_2D^2 + SICC^2 \leftarrow {}_0D^2$$

と $SICC^2$ が発生する。以後同じことが繰り返され、 $UICC$ が右向きに $SICC$ が左向きに発生する。ここで $UICC$ (unstable invariant closed curve) は不安定準周期解に対応し、 $SICC$ (stable invariant closed curve) は安定準周期解を意味する。右上の添字は不変閉曲線の巻数を表す。 ${}_0D^2$ の左下添字は不安定次元、右上添字は周期を表す (固定点の場合は省略)。

H^1 と I^1 の交わる近傍での $SICC^2$ と $UICC$ の分岐を示したのが図 5.1.5 である。図中の番号と対応させて説明すると以下ようになる：

- (1) 領域 \square には H^1 により発生した $UICC$ が存在する。
- (2) それとは別に H^2 により $SICC^2$ が左向きに発生し、領域 \square では $UICC$ と $SICC^2$ が共存する。
- (3) 線 I_1 を横切ると $SICC^2$ の巻数が半分の 1 となり、領域 \square において存在する。(巻数が 1 となった後 $SICC_2$ と示し、右下添字は巻数が半分にになる前の巻数を表す。)

領域 \square からパラメータを変化させ I_2 を横切ると、 $UICC$ と $SICC_2$ が対になって消滅する。ここでは H^1 と I^1 の交わる近傍での解析を行ったが、安定準周期解と不安定準周期解が対となって消滅する現象は周期が倍になっても存在する。

各周期の Neimark-Sacker 分岐による準周期解の発生の様子を模式的に図 5.1.6 に示す。周期が倍になる毎に発生する準周期解の安定性が入れ替わり、写像 T_λ で観察すると入れ子になって発生することがわかる。隣接する $UICC^{2^{2n}}$ と $SICC^{2^{2n+1}}$ ($n = 0, 1, \dots$) (または $SICC^{2^{2n+1}}$ と $UICC^{2^{2n+2}}$) は巻数の大きい $SICC^{2^{2n+1}}$ ($UICC^{2^{2n+2}}$) が半分の巻数 $SICC_{2^{2n+1}}^{2^{2n}}$ ($UICC_{2^{2n+2}}^{2^{2n+1}}$) となり、 $UICC^{2^{2n}}$ ($SICC^{2^{2n+1}}$) と対になって消滅する。以上より P^2 分岐の連鎖に伴う準周期解の発生・消滅のメカニズムが明らかになった。準周期解の分岐集合を数値計算により求めることは今後の課題としたい。

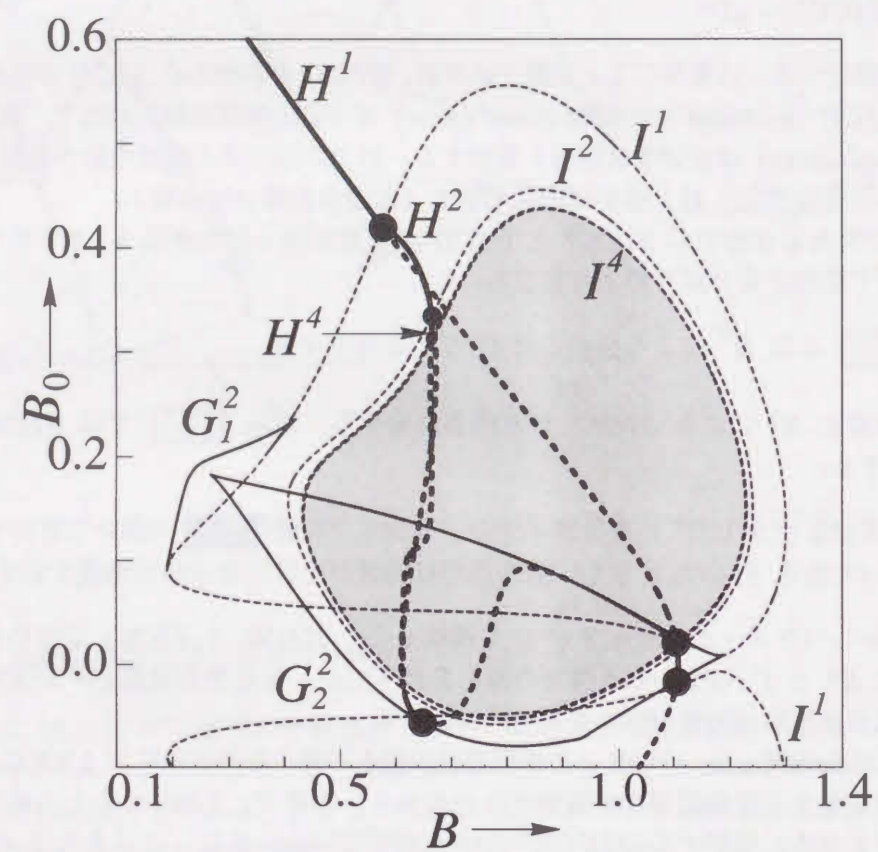


図 5.1.3: 式 (5.1.3) にみられる分岐. 影をつけた領域で周期倍分岐の連鎖によるカオスが存在する. $\nu = 1.5$.

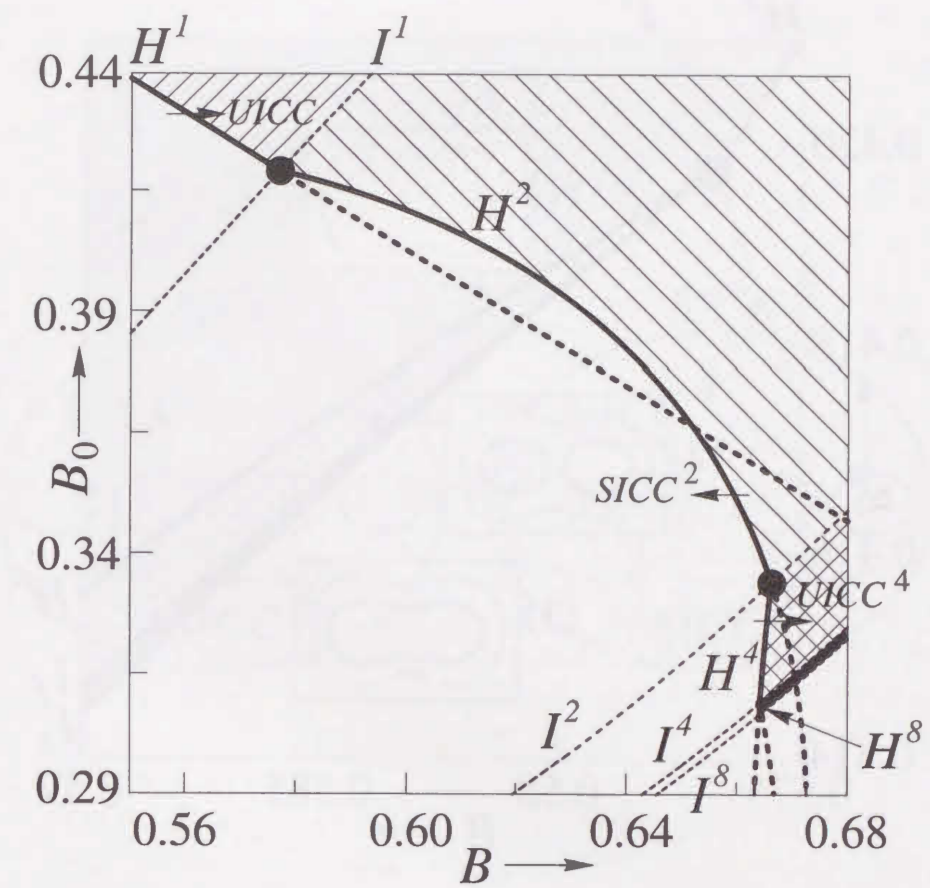


図 5.1.4: 図 5.1.3 の拡大図. 矢印の方向にパラメータ B を変化させることにより各準周期解が発生する.

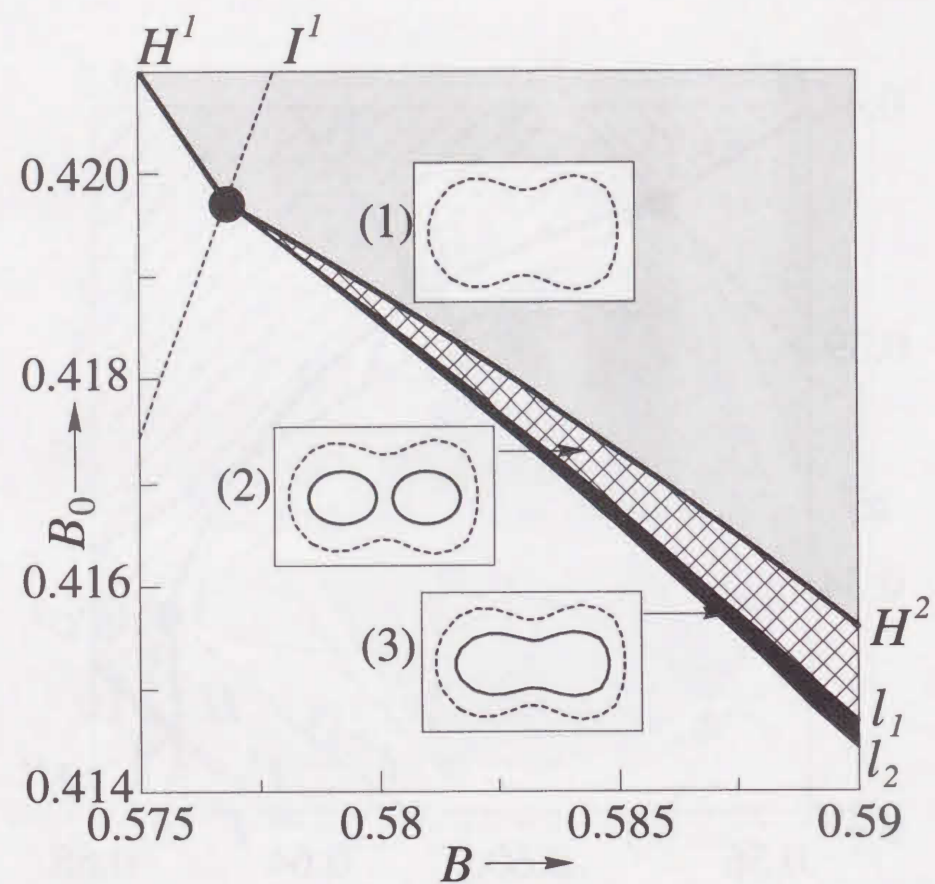


図 5.1.5: P^2 分岐付近での準周期解の分岐図。小さい四角形は状態平面を表し、点線は $UICC$, 実線は $SICC$ を意味する。

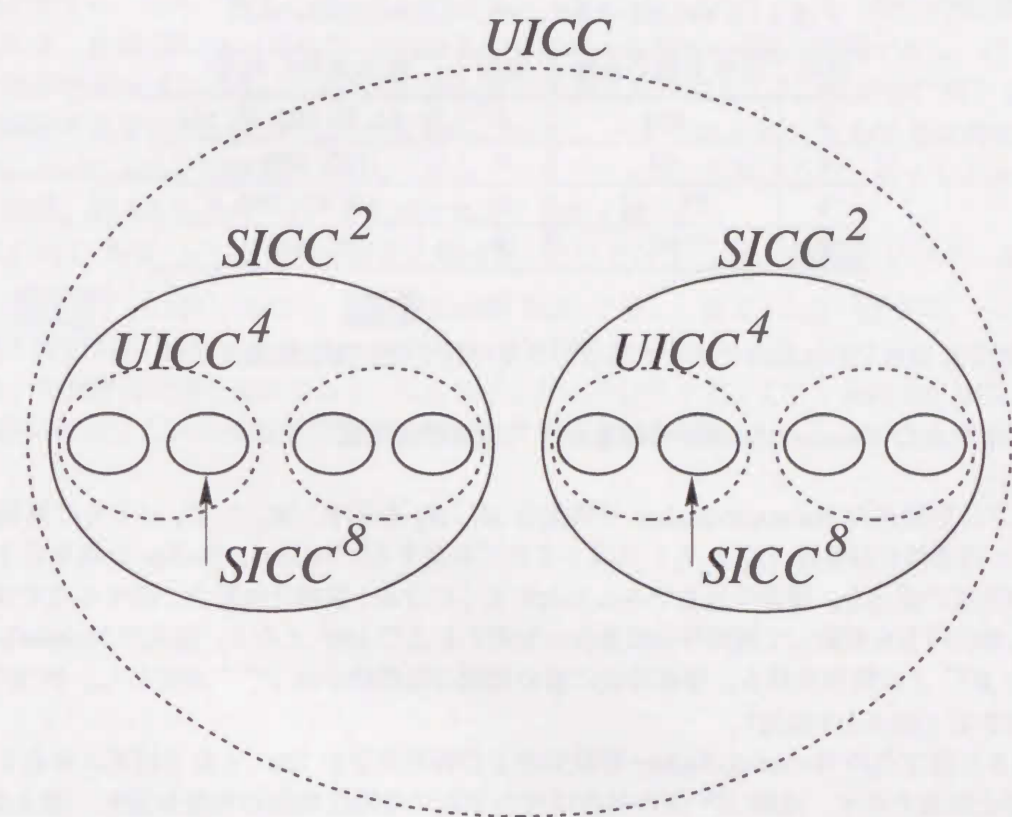


図 5.1.6: 準周期解の発生の様子 (模式図)。

5.1.3.3 Neimark-Sacker 分岐集合に接する分数調波同期化領域

(a) 特性乗数の偏角と発生する周期点の関係

Neimark-Sacker 分岐の起こる条件は写像 T_λ のヤコビ行列の固有値（特性乗数）の絶対値が1となることである。これは写像により面積が保存されることを意味する。この場合、特性乗数が特別な角度、すなわち 360° を周期で割った角度においてその周期点が周波数ロックにより発生する。表 5.1.2 に発生する周期点の周期と角度の関係をまとめる。周期が倍の Neimark-Sacker 分岐上では同じ角度で倍周期の周期点が発生する。

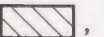


表 5.1.2: 特性乗数の角度と発生する周期点の周期の関係。

周期	特性乗数の角度	周期	特性乗数の角度
3	120	7	約 51, 約 102, 約 153
4	90	8	45, 135
5	72, 144	9	40, 80, 160
6	60	10	36, 108

次の節では表 5.1.2 において斜字で示した角度付近での同期化領域を示す。

(b) 固定点の Neimark-Sacker 分岐集合上での同期化領域

図 5.1.7 に固定点の Neimark-Sacker 分岐集合 H_1, H_2 を示す。 H_1 と H_2 はともに接線分岐集合 (G) と周期倍分岐集合 (I_1 と I_2) にはさまれて存在する。Neimark-Sacker 分岐集合上での特性乗数の角度の変化を、複素平面上でみると次のようになる：接線分岐集合と接する点では 0° で、そこから単位円上を移動して周期倍分岐集合と交差する点で 180° となる。高次の Neimark-Sacker 分岐集合 H^{2^n} 上の特性乗数も、接線分岐に前の周期の周期倍分岐 $I^{2^{n-1}}$ が対応し、 0° から 180° まで移動する（図 5.1.8 参照）。

図 5.1.9 に固定点の Neimark-Sacker 分岐集合上の特性乗数が 120° となる付近に存在する分数調波同期化領域を示す。曲線 H^1 上の目盛は複素平面での特性乗数の角度を表す。図 5.1.9 の領域 ,  では、図 5.1.10(a) (b) に示す $2/3, 3/3$ 分数調波周期解が安定に存在する。分数調波の名前のつけかたは、状態平面で観察をして、分母は写像 T_λ の点の数、すなわち周期、分子は巻数、すなわち 1 周期あたりの振動数とした。従って n/m 分数調波は、外力の角周波数を ν 、系の発振角周波数を ν_0 とした場合、 $n/m = \nu_0/\nu$ となる。領域  からパラメータ B を減少させて Neimark-Sacker 分岐集合 H^3 を横切ることにより

$${}_2D^3 + SICC^3 \leftarrow {}_0D^3$$




と、安定な準周期解が発生する。影をつけた領域が重なるところ  では 3 つの同期状態が共存し、それぞれの状態平面図を図 5.1.10 に示す。この領域では状態の初期値によりどのように同期するかが決まる。

図 5.1.11 において Neimark-Sacker 分岐集合上の特性乗数が純虚数 (90°) となる付近での $3/4$ 分数調波同期化領域を ,  に示す。Neimark-Sacker 分岐 H^4 により、 B を減少さ

せる方向に準周期解が発生する：

$${}_2D^4 + SICC^4 \leftarrow {}_0D^4$$




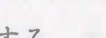
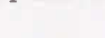
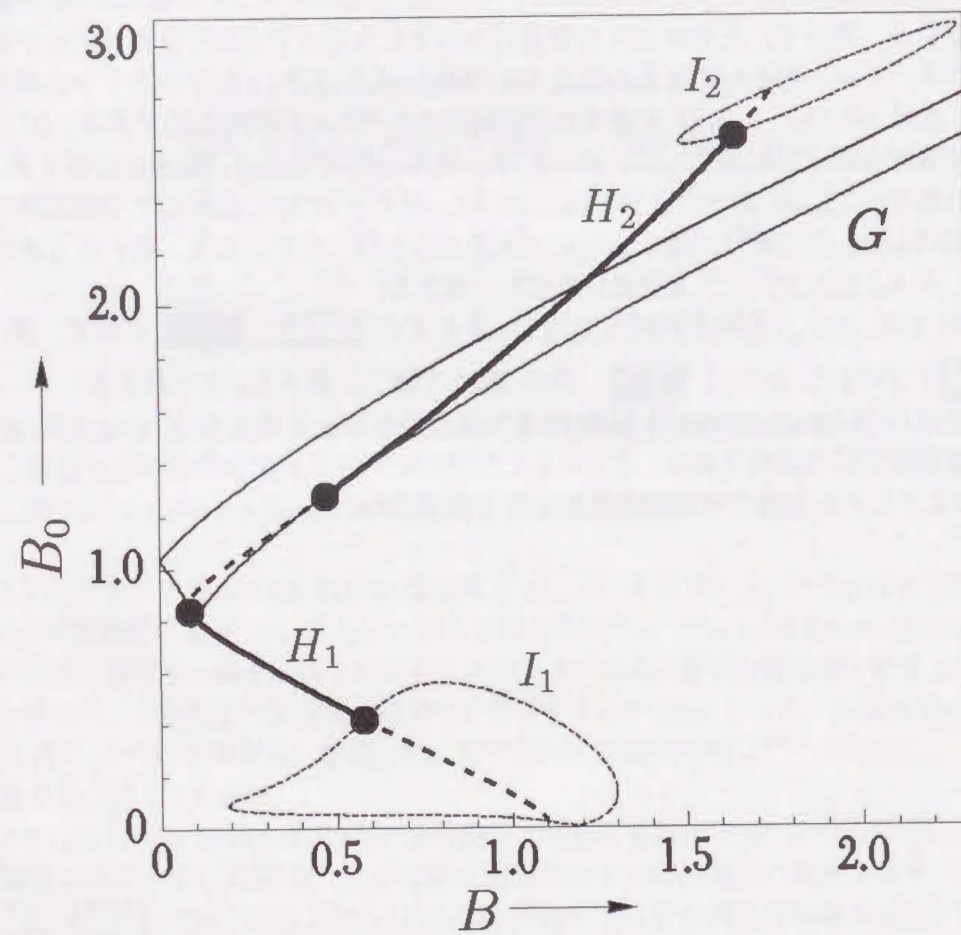
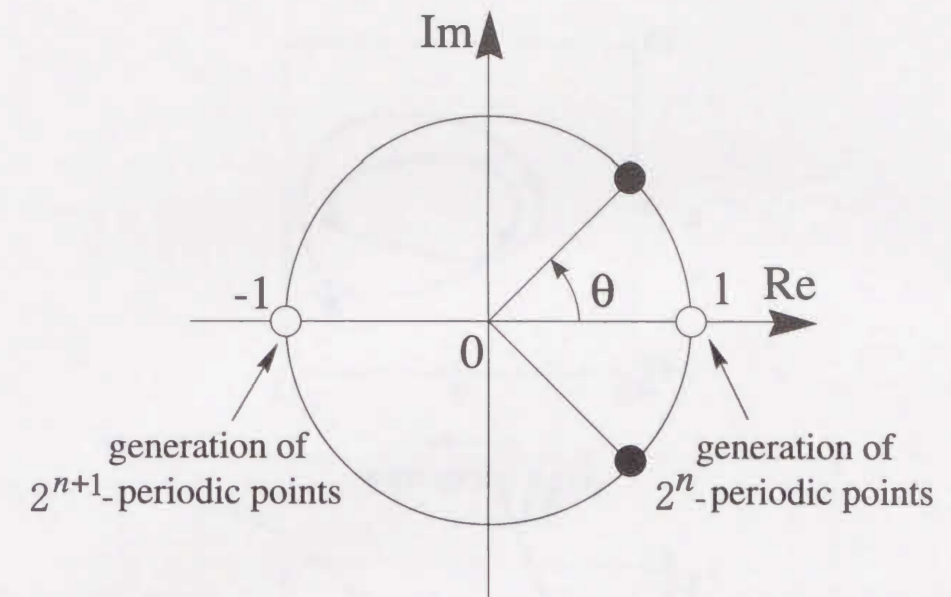
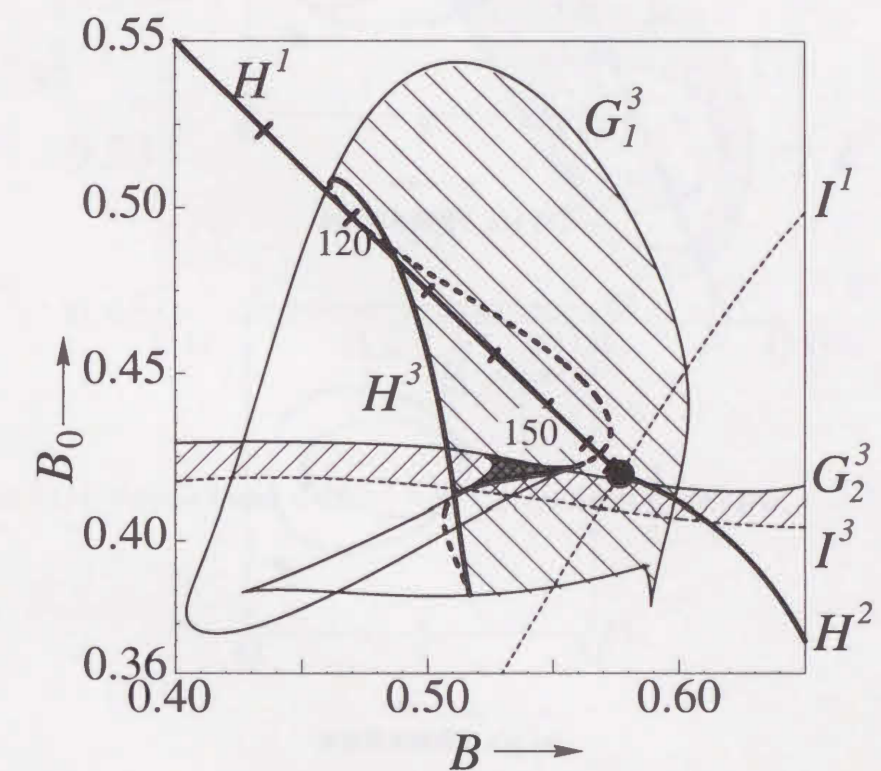
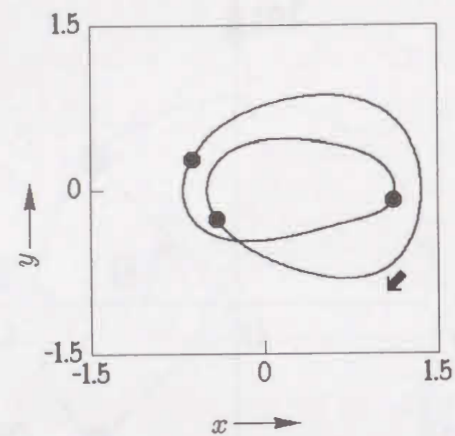
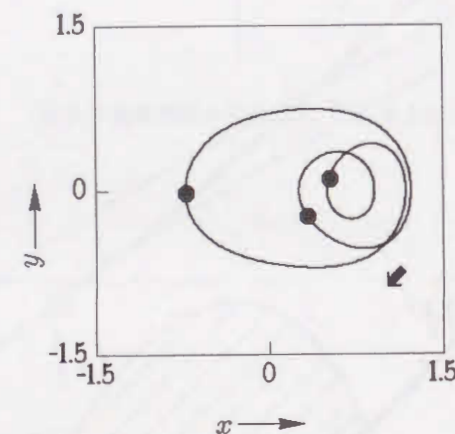
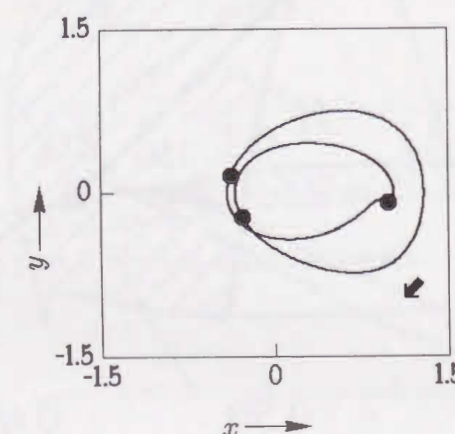
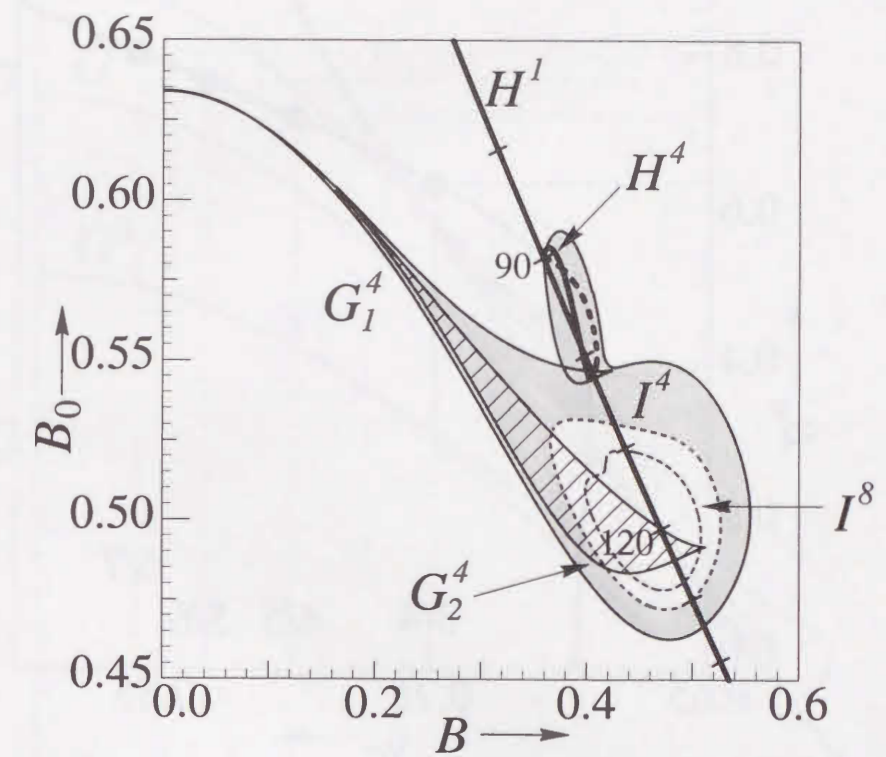
図 5.1.9 と同様に同期化領域が重なる。しかし図 5.1.11 では、領域  から周期倍分岐 I^4, I^8 を経ることによりカオスへの進展がみられる。図 5.1.11 より接線分岐集合 G_1^4 で囲まれる同期化領域が $B = 0$ に接していることがわかる。 $B = 0$ では式 (5.1.3) は周期的外力のない自律系となり、その場合に存在するリミットサイクルの角周波数 ν_0 とパラメータ B_0 の関係を描いたのが図 5.1.12 である。横軸は n/m 分数調波の n/m に対応する。 $\nu_0 = 3/4$ での B_0 の値と、図 5.1.11 の同期化領域が $B = 0$ に接する B_0 の値が等しい。一般的に ν_0 が有理数比 n/m で表されるとき、図 5.1.12 の ν_0 と B_0 の関係より、その ν_0 に対応する B_0 の値に n/m 分数調波同期化領域が接する。従って、上記の $3/4$ 分数調波のほかにもさまざまな分数調波同期が存在し得ることがわかる。その一例として図 5.1.13 に $6/7$ (G^7), $5/6$ (G^6), $4/5$ (G^5) 分数調波同期化領域を示す。曲線 G^k ($k = 5, 6, 7$) で囲まれた領域がそれぞれの同期化領域である。図 5.1.11 と同様に同期化領域がひげ状に派生して、 $B = 0$ で、図 5.1.12 に示した B_0 の値に接する。 H_1 上の特性乗数の角度が $72, 60, 約 51^\circ$ となる点において、それぞれ $4/5, 5/6, 6/7$ 分数調波同期化領域が Neimark-Sacker 分岐集合に接し、アーノルドの舌と同じ形状となる。接するときの特性乗数の角度は、表 5.1.2 の $5, 6, 7$ 周期の角度と一致する。

図 5.1.14 に $5/5, 5/7$ 分数調波同期化領域を、それぞれ ,  に示す。 H_1 上には $5/5$ () は 144° , $5/7$ () は約 153° で接し、表 5.1.2 と一致する。

以上が固定点の Neimark-Sacker 分岐集合 H^1 付近でみられる $2/3, 3/3, 3/4, 4/5, 5/5, 5/6, 5/7, 6/7$ 分数調波同期化領域である。ここに示したほかにもさまざまな分数調波が存在しており、 H^1 の存在によりこれら複雑な同期化領域が生ずる様子がわかる。

図 5.1.7: 2つの Neimark-Sacker 分岐集合. $\nu = 1.5$.図 5.1.8: H^{2^n} 上における特性乗数の変化.図 5.1.9: Neimark-Sacker 分岐集合上でみられる $2/3$ $3/3$ 分数調波同期化領域. $\nu = 1.5$.

(a) $2/3$ 分数調波周期解.(b) $3/3$ 分数調波周期解.(c) $2/3$ 分数調波周期解.図 5.1.10: 状態平面図. $B_0 = 0.42$, $B = 0.54$. 黒い点は写像 T_λ の点を表す.図 5.1.11: Neimark-Sacker 分岐集合上でみられる $3/4$ 分数調波同期化領域. $\nu = 1.5$.

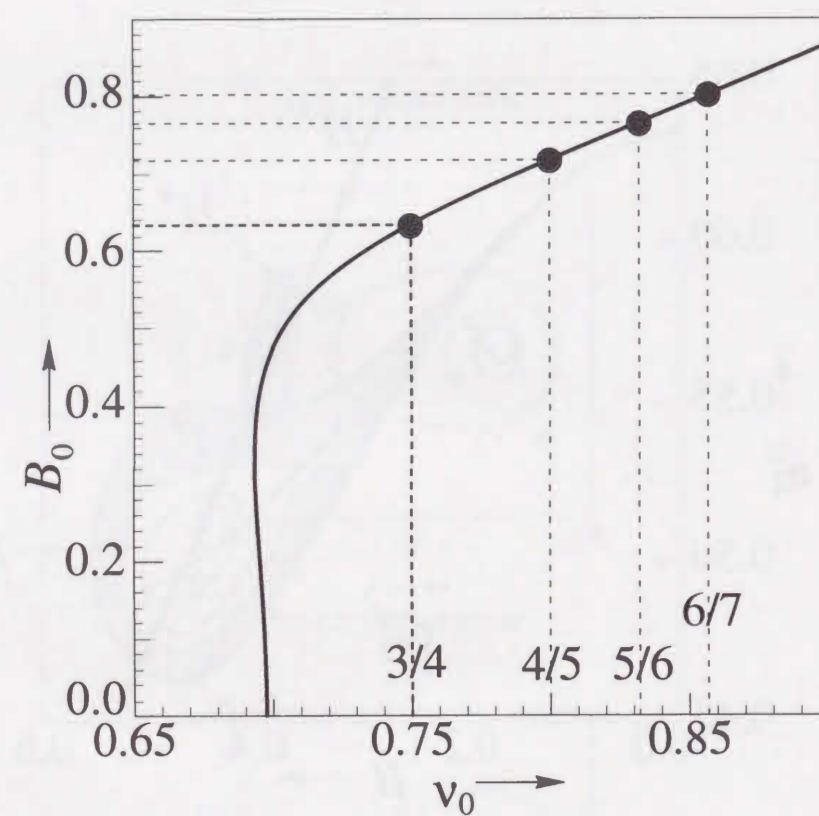


図 5.1.12: 式 (5.1.3) において $B=0$ としたときのリミットサイクルの角周波数 ν_0 とパラメータ B_0 の関係。

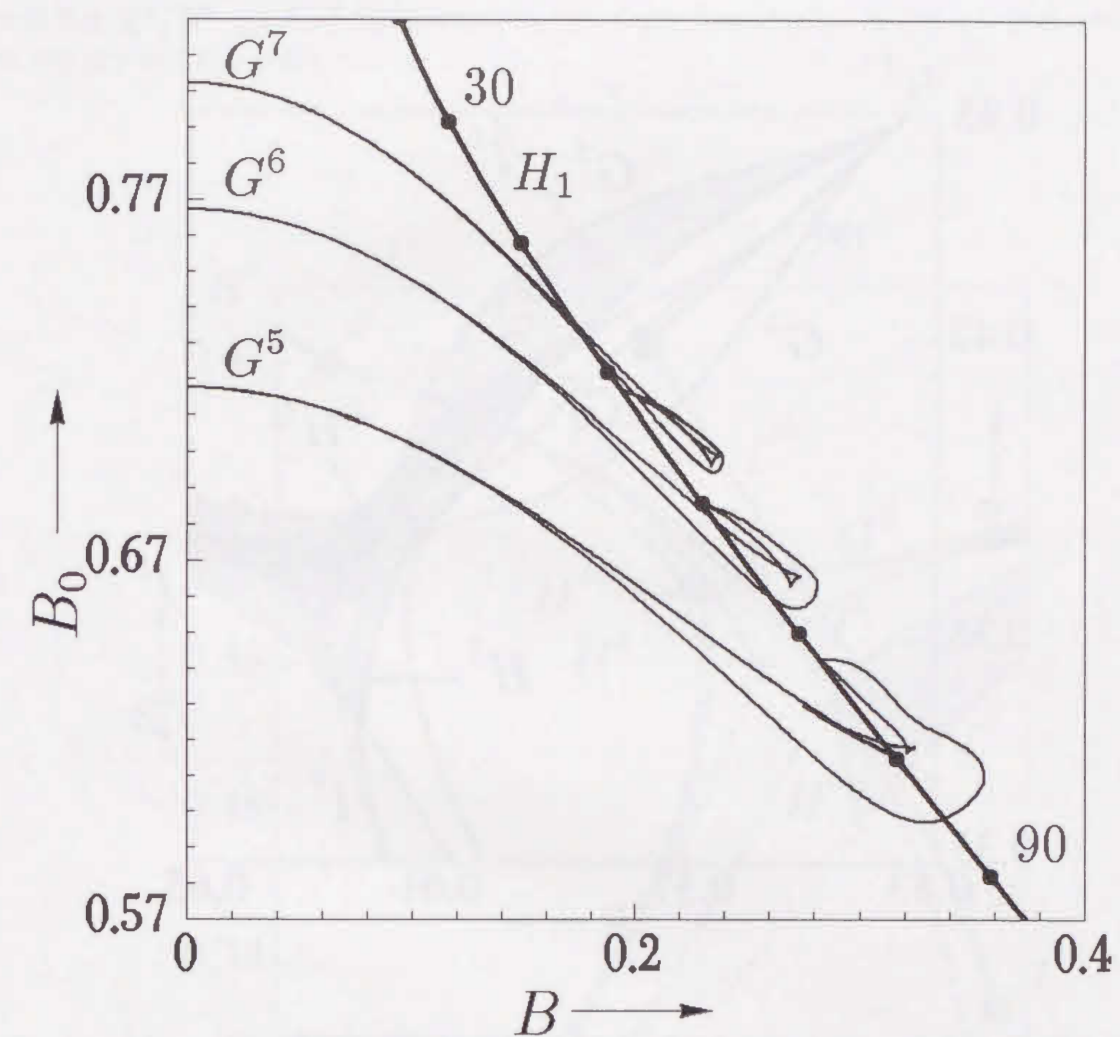


図 5.1.13: Neimark-Sacker 分岐集合上にみられる $6/7$ (G^7), $5/6$ (G^6), $4/5$ (G^5) 分数調波同期化領域. $\nu = 1.5$.

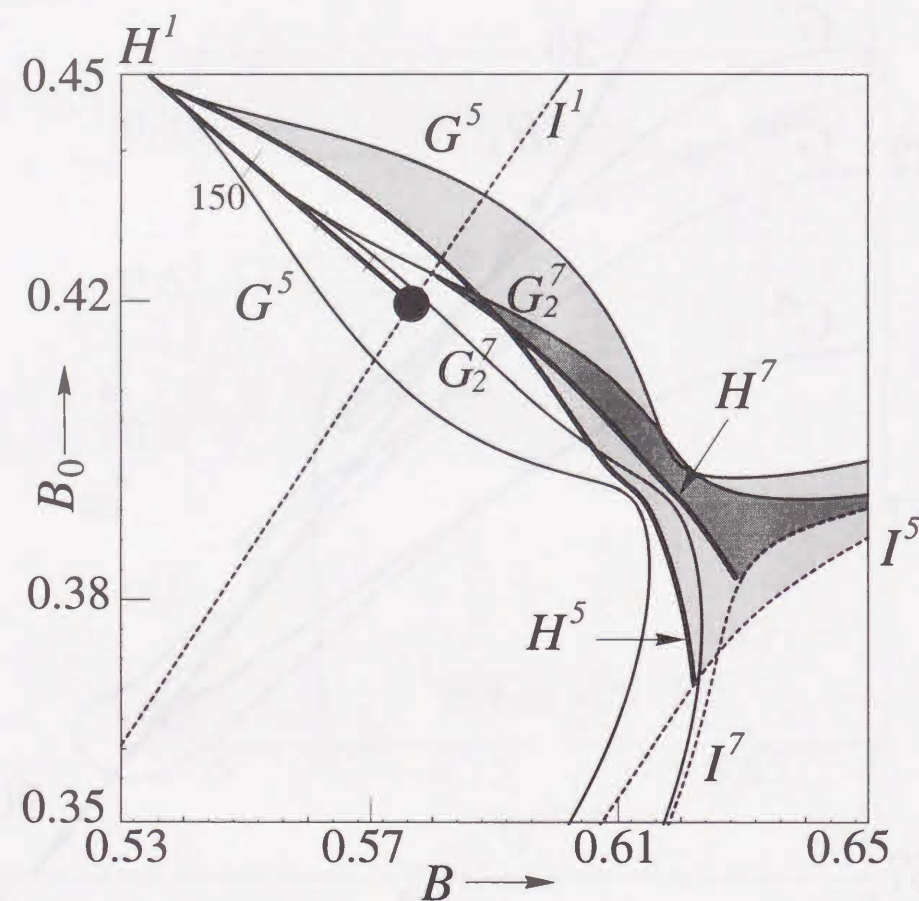


図 5.1.14: Neimark-Sacker 分岐集合上にみられる 5/5, 5/7 分数調波同期化領域. $\nu = 1.5$.

(c) 2 周期点の Neimark-Sacker 分岐集合上での同期化領域

図 5.1.15 に 2 周期点の Neimark-Sacker 分岐集合 H^2 上に発生する 6/6, 8/8, 10/10 分数調波同期化領域を, それぞれ \square , \square , \square に示す. 固定点の Neimark-Sacker 分岐集合 H^1 上で $\theta = 120^\circ, 90^\circ$ のときに 3, 4 周期点の安定領域 (3/3, 3/4 分数調波同期化領域) が存在したのと同様に, H^2 上でも $\theta = 120^\circ, 90^\circ$ のときにその倍の周期の 6, 8 周期点の安定領域が存在する. $\theta = 72^\circ$ で 5 周期の倍の 10 周期の安定領域が存在する. これらの周期点はいずれも 6/6, 8/8, 10/10 分数調波同期化領域であることを確認した. 以上のことより高次の Neimark-Sacker 分岐集合 H^4, H^8 上にも同じ現象が起こり, P^2 分岐の連鎖により, 無限個の分数調波同期化領域が存在することを示唆している.

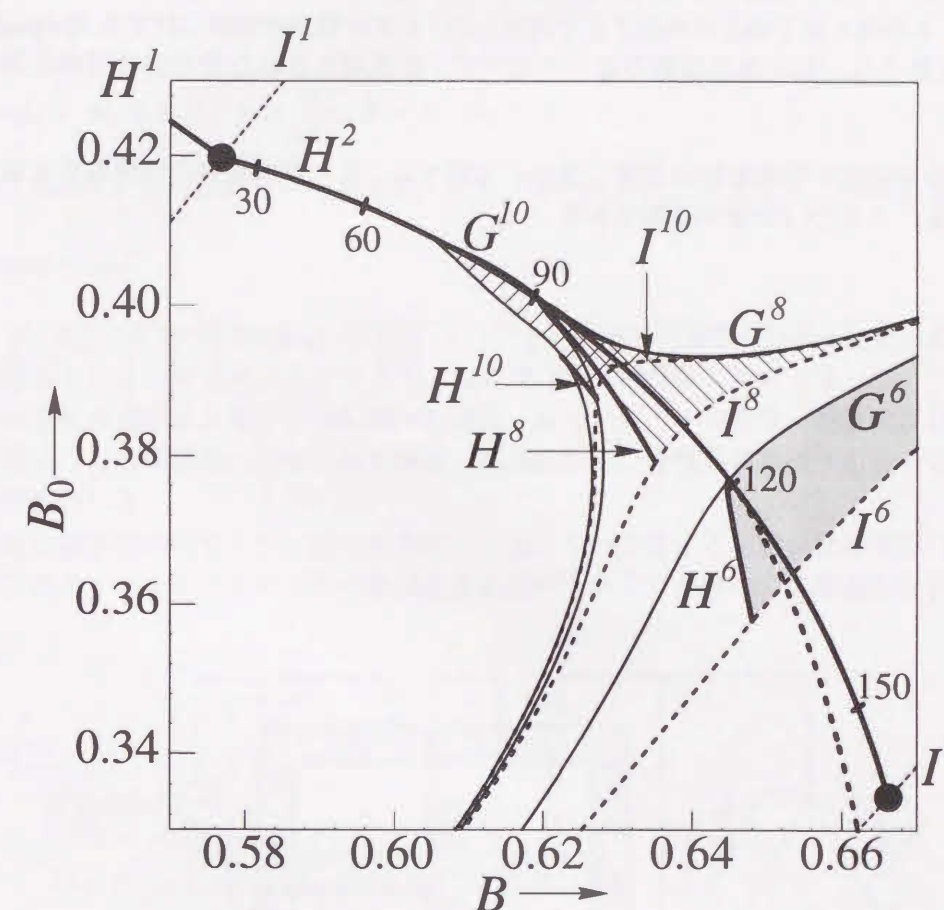


図 5.1.15: 2 周期の Neimark-Sacker 分岐集合 H^2 上にみられる各種分数調波同期化領域. それぞれの周期において G, I, H で囲まれた右側の領域が同期化領域である. $\nu = 1.5$.

5.1.4 むすび

直流成分を含む周期的外力を印加した Duffing-Rayleigh 型発振器にみられる基本調波と 1/2 分数調波周期解の分岐集合を数値計算により求め、以下の結果を得た：

- あるパラメータ領域において、Neimark-Sacker 分岐と周期倍分岐の交わりによる、余次元 2 の分岐の連鎖によりカオスへ至るルートが存在する。この場合、周期倍分岐だけの連鎖により生じるカオスとは異なり、アトラクタとなる安定なカオスと、逆時間方向に求積することにより観測できる完全不安定カオスが生じる。各周期の Neimark-Sacker 分岐により発生する準周期解は倍周期になる毎に安定性が入れ替わり、安定準周期解と不安定準周期解が対になって消滅する。
- 基本調波振動に対する Neimark-Sacker 分岐集合上で特性乗数が有理数となる特別な角度の点において、周波数ロックにより生ずるさまざまな分数調波同期化領域が存在する。その領域の境界線に対応する接線分岐曲線が複雑な形状となる場合や、領域内に周期倍列の進展によるカオスのみられる場合のあることを見出した。1/2 分数調波振動に対する Neimark-Sacker 分岐近傍では、基本調波振動の場合と比べて、倍周期化された分数調波同期化領域が存在する。

準周期解の安定性を数学的判定基準に基づいて調べること、準周期解の分岐集合を数値計算によりもとめることなどは今後の課題である。

5.2 位相変換器回路にみられる余次元 2 の分岐

5.2.1 まえがき

図 5.2.1 に示される回路は単相入力を用いることにより、三相出力を得ることができるので、位相変換器回路とよばれている [38, 39]。正規化された方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -ky - (c_0 + c_1)x - \frac{1}{4}c_3(x^2 + 3u^2)x \\ \frac{du}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -kv - \left(\frac{1}{3}c_0 + c_1\right)u - \frac{1}{4}c_3(x^2 + 3u^2)u + B \cos t + B_0 \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

となる。ここで

$$x = \phi_a - \phi_b, u = \phi_c, k = \frac{g}{\omega C}, B \propto E, B_0 \propto E_0$$

とおいた。図 5.2.1 の回路において非線形インダクタの特性は、電流を i 、磁束を ϕ とすれば

$$i = c_1\phi + c_3\phi^3$$

と仮定した。式 (5.2.1) は Duffing 方程式 (u, v) とパラメータ励振系 (x, y) を記述する方程式を非線形結合した系と考えることができる。故に図 5.2.1 の回路においては、パラメータ励振による周期倍分岐の連鎖によるカオス状態への遷移、余次元 2・3 の分岐、跳躍およびヒステリシス現象に関連した周期振動の共存、基本調波・高調波および分数調波共振などのさまざまな複雑な現象が予想される。

本節では分岐問題の観点より、余次元の高い分岐について考える。数値計算を行い分岐集合を求めることにより、余次元 3 の分岐の連鎖による新たなカオス状態への遷移過程を示す。

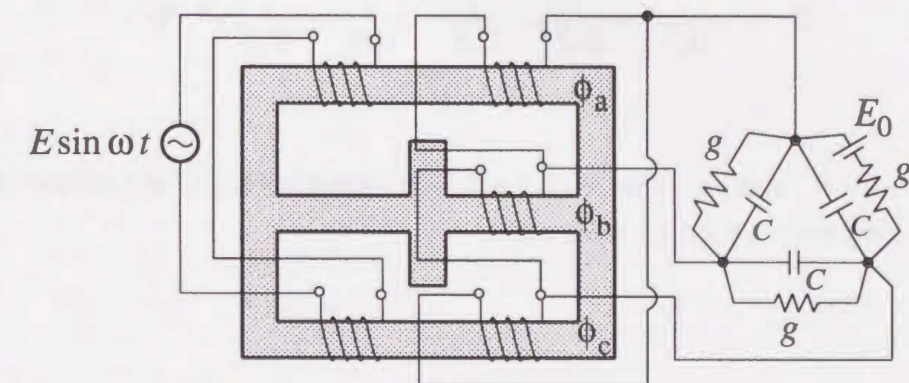


図 5.2.1: 位相変換器回路。

5.2.2 解析結果

5.2.2.1 パラメータ値の決定

式(5.2.1)において、分岐パラメータとしては交流電源の振幅に対応する B と直流電源の大きさに応じる B_0 を選び、 c_0, c_1, c_3 は以下の値に固定した [7].

$$c_0 = 0.0, c_1 = 0.0, c_3 = 1.0$$

残りのパラメータ k を決定するために、図 5.2.2 に示す 3 パラメータ分岐図を求めた。散逸項である k が 0.3 より大きければ、周期倍分岐どうしの交わりによる余次元 2 の分岐は消滅する。 k が 0.1 より小さければ分岐構造は複雑になることが予想される [7]。従って本節では $k = 0.1$ と固定し、 (B, B_0) 平面での分岐問題を考える。

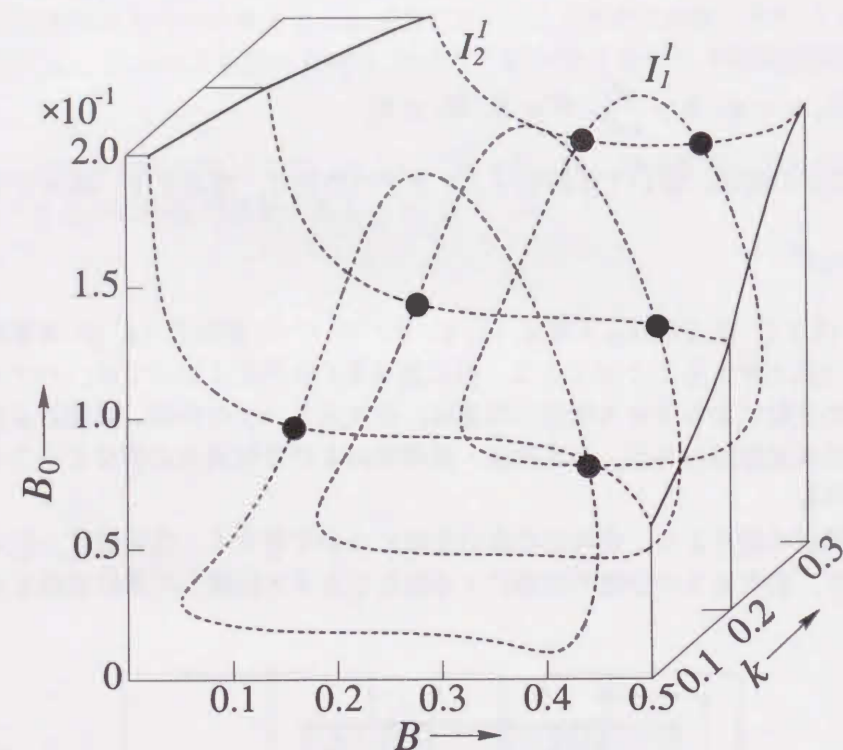


図 5.2.2: パラメータ (B, B_0, k) 空間における分岐図。破線は周期倍分岐集合を、黒丸は周期倍分岐集合どうしの交わりによる余次元 2 の分岐を表す。

5.2.2.2 結合のない場合の分岐

図 5.2.3 に $x = y = 0$ の解、すなわち変数 u と v による Duffing 方程式の周期解の分岐図を示す。従って図 5.2.3 は Duffing 方程式にみられる分岐図と全く同じである [7]。影をつけた領域で

5.2. 位相変換器回路にみられる余次元 2 の分岐

周期倍分岐の連鎖によるカオスが存在する。次節では結合の影響により、分岐構造にどのような変化が生ずるのかを考察する。

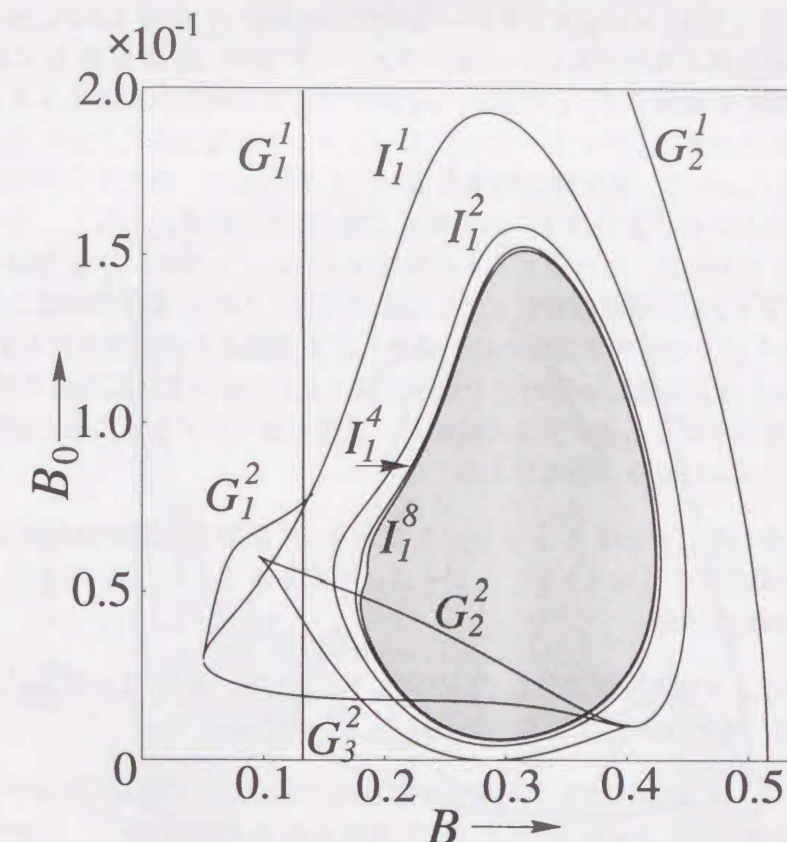


図 5.2.3: $x = y = 0$ の周期解の分岐図。

5.2.2.3 結合した場合の分岐

$xy \neq 0$ の解, すなわち結合の影響をうけた周期解の分岐図を図 5.2.4 に示す. 影をつけた領域 \square において安定な固定点 ($x = y = 0$) が存在する. その領域からパラメータ B を直線 l_1 に沿って増加させることにより, 周期倍分岐集合 I_1^1 により安定な 2 周期点 ($x = y = 0$) が発生する (図 5.2.5(a)). 故に $x = y = 0$ を保つ周期倍分岐集合 I_1^1 は図 5.2.3 に示した Duffing 方程式にみられる分岐と全く同じである. 一方, パラメータ B と B_0 を曲線 l_2 に沿って変化させることにより, 周期倍分岐集合 I_2^1 を横切り, $xy \neq 0$ である 2 周期点が発生する (図 5.2.5(b)). この分岐現象は, 位相変換器回路において生ずるパラメータ励振現象に対応する.

図 5.2.4 中の黒丸において, 周期倍分岐集合 I_1^1 と I_2^1 が交わり, 余次元 2 の分岐が生じる. 周期倍分岐どうしの交わりによる余次元 2 の分岐は文献 [5] には含まれてなく, 系が対称性をもつために現れる現象と思われる. この余次元 2 の分岐点からは, 2 周期点の D 型分枝 D_1^2 と D_2^2 が必然的に生じる. 図 5.2.6 に周期倍分岐どうしの交点付近における多様体の模式図を示す. 2 周期点の D 型分枝 D^2 が 2 つ存在するために, 発生した 2 周期点の不安定次元の矛盾がなくなる.

図 5.2.7 に図 5.2.4 のより詳しい分岐図を示す. 図 5.2.7 において, 四角形で示された D 型分枝と周期倍分岐の交わりによる余次元 3 の分岐が, 連鎖を起こしていることが観測できる. この連鎖の起こるメカニズムは以下の通りである:

- (1) 結合のない場合の解に対応する $x = y = 0$ である 2^n 周期点の周期倍分岐の連鎖 $I_1^{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が存在する (図 5.2.3). $x = y = 0$ であることより, 式 (5.2.1) は u と v による Duffing 方程式となる.
- (2) 結合項の影響により別の周期倍分岐 I_2^1 が発生する. I_1^1 と I_2^1 が交わる点において余次元 2 の分岐が生じ, その点からは D 型分枝 D_1^2 と D_2^2 が現れる.
- (3) 分岐曲線 $D_1^{2^n}$ と $I_1^{2^n}$ は図 5.2.7 の四角形で示された点において交わり, 余次元 3 の分岐が生ずる. この余次元 3 の分岐付近では, 2^{n+1} 周期点の D 型分枝 $D_1^{2^{n+1}}$ と 2^n 周期点の周期倍分岐が必然的に生ずる (図 5.2.8). 発生した D 型分枝 $D_1^{2^{n+1}}$ と Duffing 方程式において存在する周期倍分岐 $I_1^{2^{n+1}}$ が交わる.
- (4) (3) を繰り返すことにより, 余次元 3 の分岐の連鎖が生じ, カオス状態へと遷移する.

図 5.2.9 において D 型分枝集合 D^{2^n} はジグザグパターンを形成している. 同様な樹状パターンは文献 [31] においても報告されており, 平均値に関係した関数列の繰り込みの性質が, 樹状パターン形成の条件となっていることが証明されている [37].

図 5.2.9 において 3 つのタイプのカオスへの遷移が観測されるので図 5.2.10 に遷移図を示す. 1 つは安定な固定点からカオス・アトラクタへの遷移である. あとの 2 つはサドルタイプの固定点から周期倍分岐の連鎖によるサドル的カオスへの遷移である. サドル的カオスとはアトラクタでもないし, かつ数値計算において逆時間方向に求積しても観測できないカオスのことである. 本節で示したように分岐集合を求めることによりのみ, その存在を示すことが可能となる.

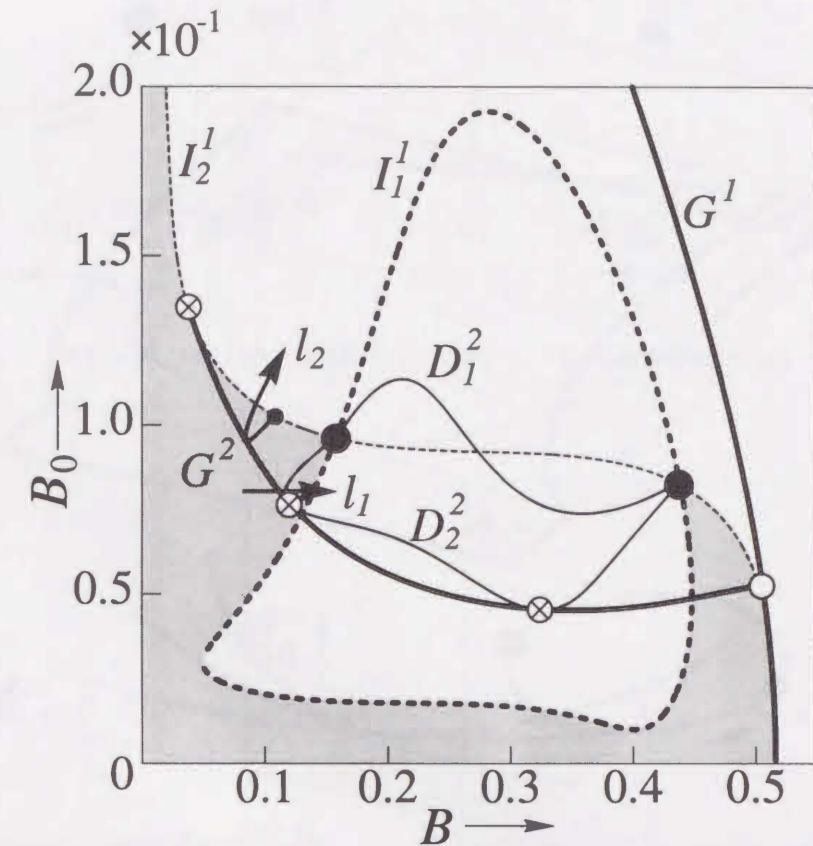
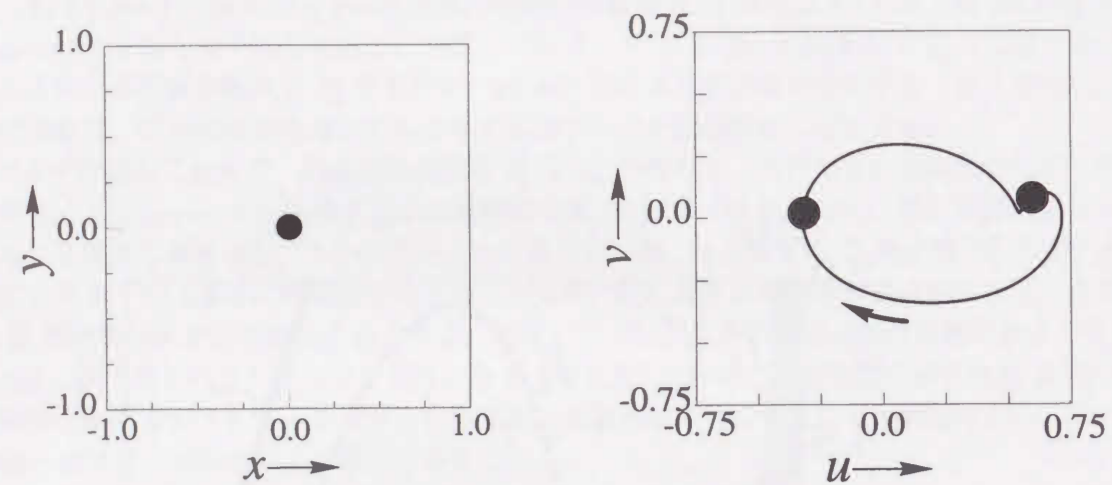
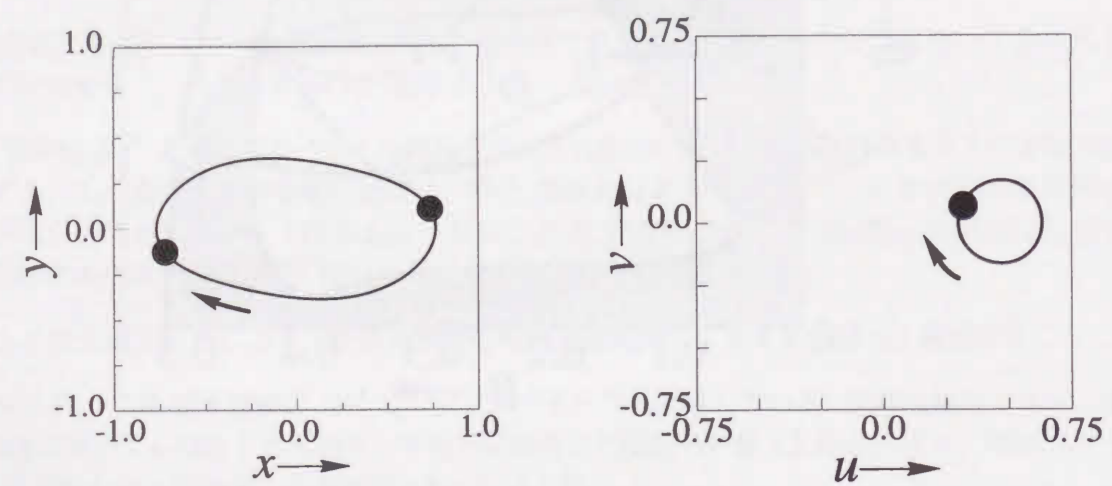


図 5.2.4: 式 (5.2.1) の周期解の分岐図. 白丸は接線分岐集合 G^1 と周期倍分岐集合 I_2^1 の交わりによる余次元 2 の分岐 (TP 分岐 [36]) を示す. この点から 2 周期点の接線分岐集合 G^2 が現われる.



(a) 周期倍分岐集合 I_1^1 により発生した2周期解. $B = 0.15, B_0 = 0.08$.



(b) 周期倍分岐集合 I_2^1 により発生した2周期解. $B = 0.12, B_0 = 0.1$.

図 5.2.5: 周期倍分岐 I_1^1 と I_2^1 により発生した2周期解の解軌道. 黒丸はポアンカレ写像 T_λ による点を, 矢印は軌道の方向を示す.

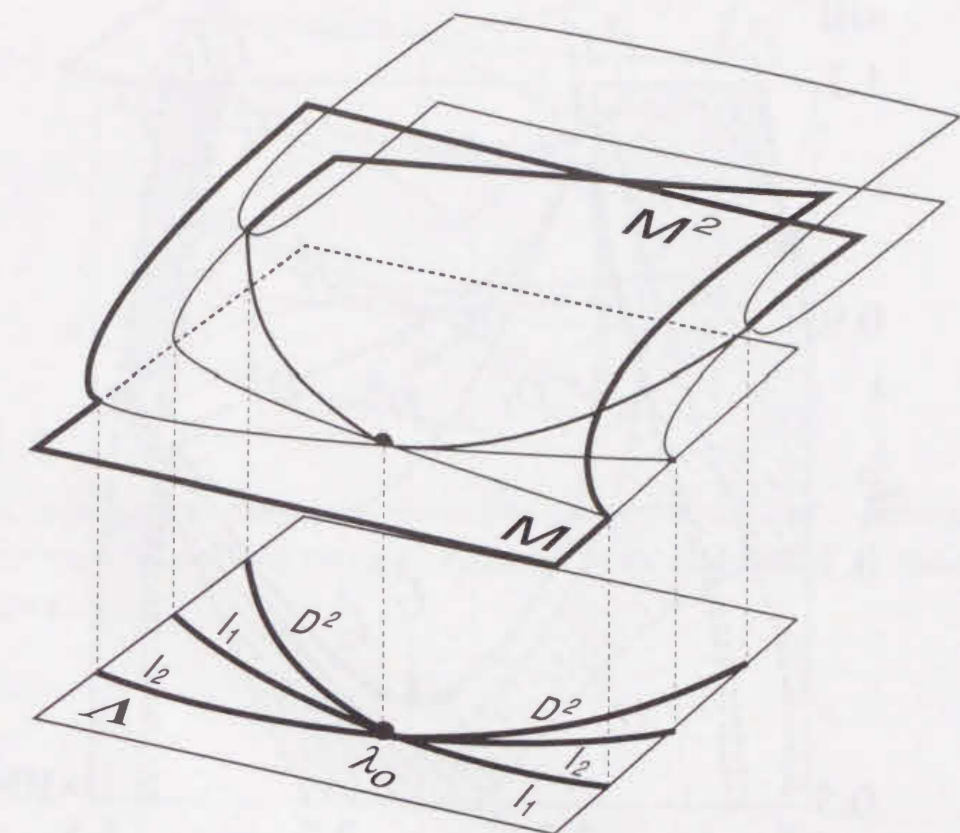


図 5.2.6: λ_0 : 周期倍分岐どうしの交わりによる余次元2の分岐点近傍における固定点多様体 M と2周期点多様体 M^2 の様子. 太い実線は安定, 細い実線は不安定多様体を表す.

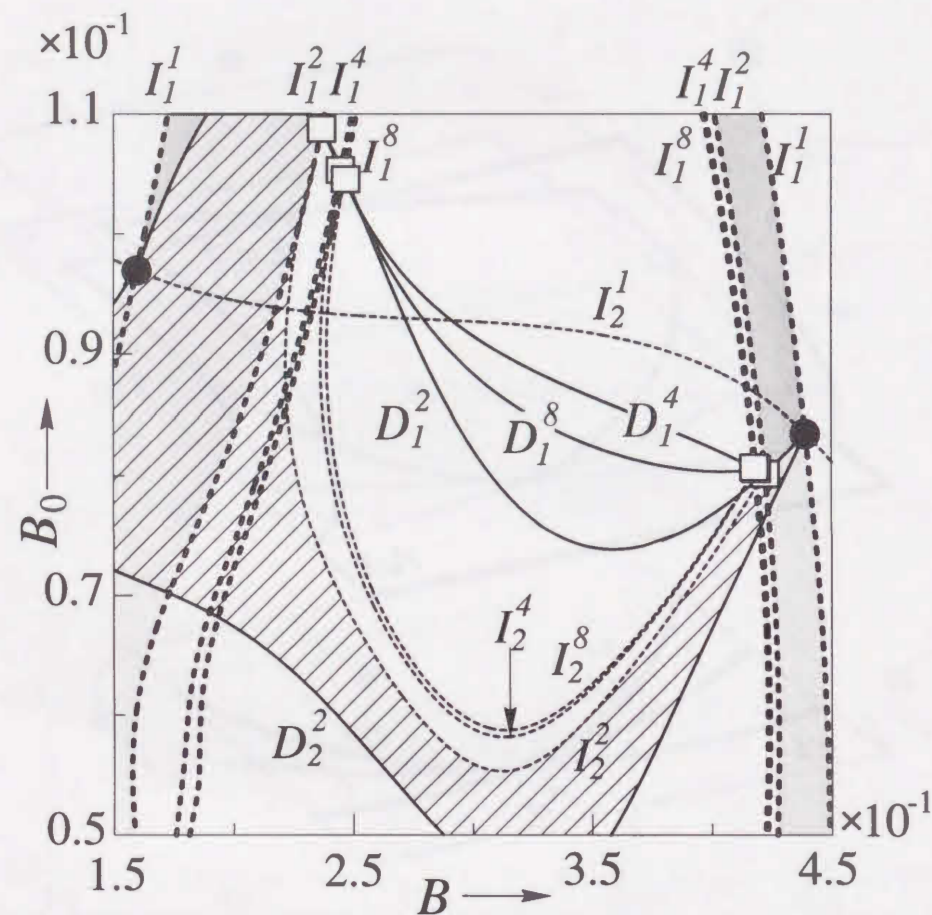


図 5.2.7: 図 5.2.4 の拡大図。四角形は D 型分枝集合と周期倍分枝集合との交わりによる余次元 3 の分岐を表す。余次元 3 の分岐の連鎖が 2 ヶ所で観測される。

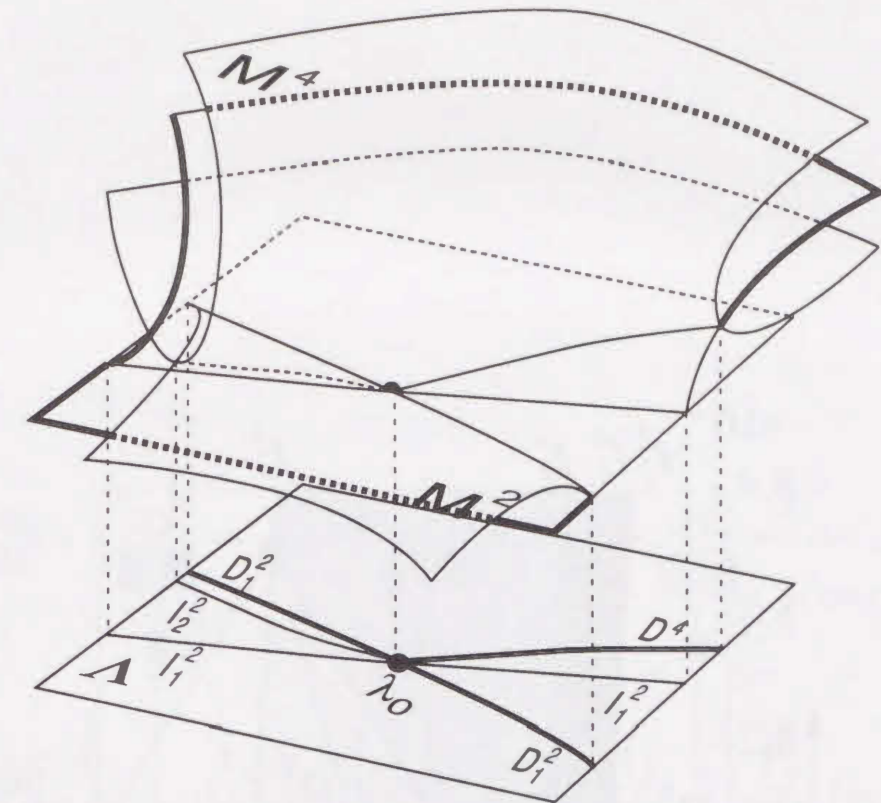


図 5.2.8: λ_0 : D 型分枝集合と周期倍分枝集合の交わり点近傍における 2 周期点多様体 M^2 と 4 周期点多様体 M^4 の様子。A はパラメータ平面を表す。多様体の図において、太い実線は安定、細い実線は不安定多様体を表す。

5.2.3 むすび

位相変換器回路にみられる周期解の分岐現象を解析した。系は Duffing 方程式とパラメータ励振系を記述する方程式を非線形結合した系と考えることができる。パラメータ励振系の影響が、Duffing 方程式にみられる分岐構造にどのように変化を及ぼすのかを調べた。本節で得た主な結果は以下の通りである：

(1) 周期倍分枝集合どうしの交わりによる新たな余次元 2 の分岐を発見した。その近傍では高次の周期の D 型分枝集合が発生する。発生した D 型分枝集合が新たに周期倍分枝集合と交わることを繰り返すことにより、余次元 3 の分岐の連鎖が観測された。

(2) (1) の余次元 3 の分岐の連鎖によるカオスへの遷移過程は、3 つのルートが存在した。1 つは安定な固定点からカオス・アトラクタへのルートであり、残りの 2 つはサドルタイプの固定点からサドル的カオスへのルートである。

周期倍分枝集合どうしの交わりによる余次元 2 の分岐点付近での詳しい周期解の振舞いを調べることや、余次元 3 の分岐の分類を行うことなどは今後の課題である。

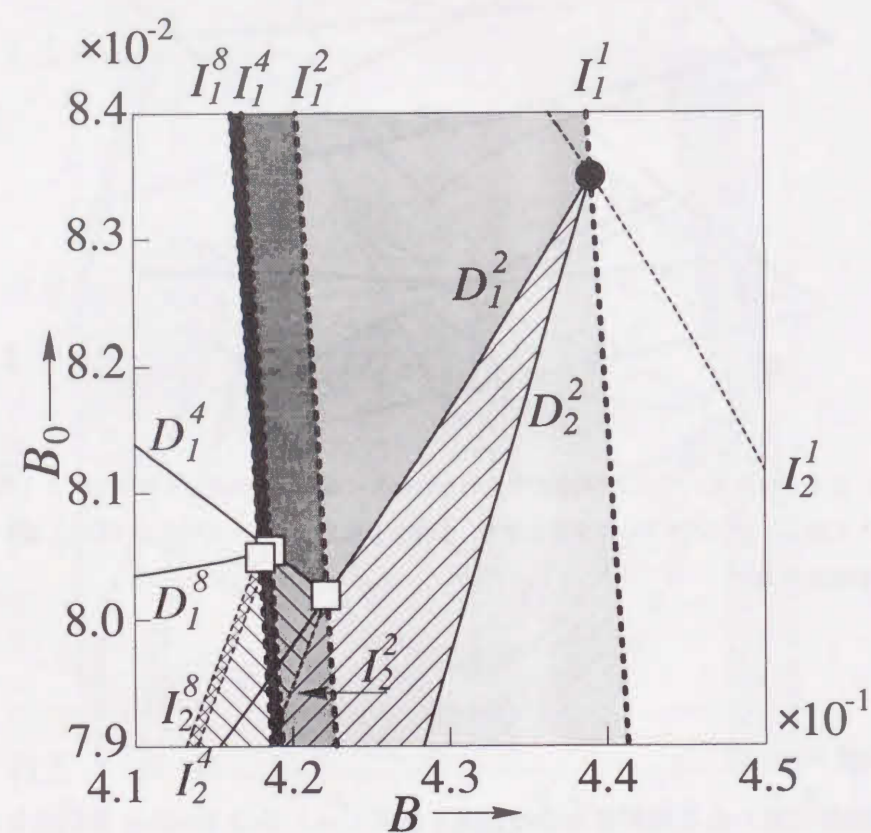


図 5.2.9: 図 5.2.7 の拡大図.

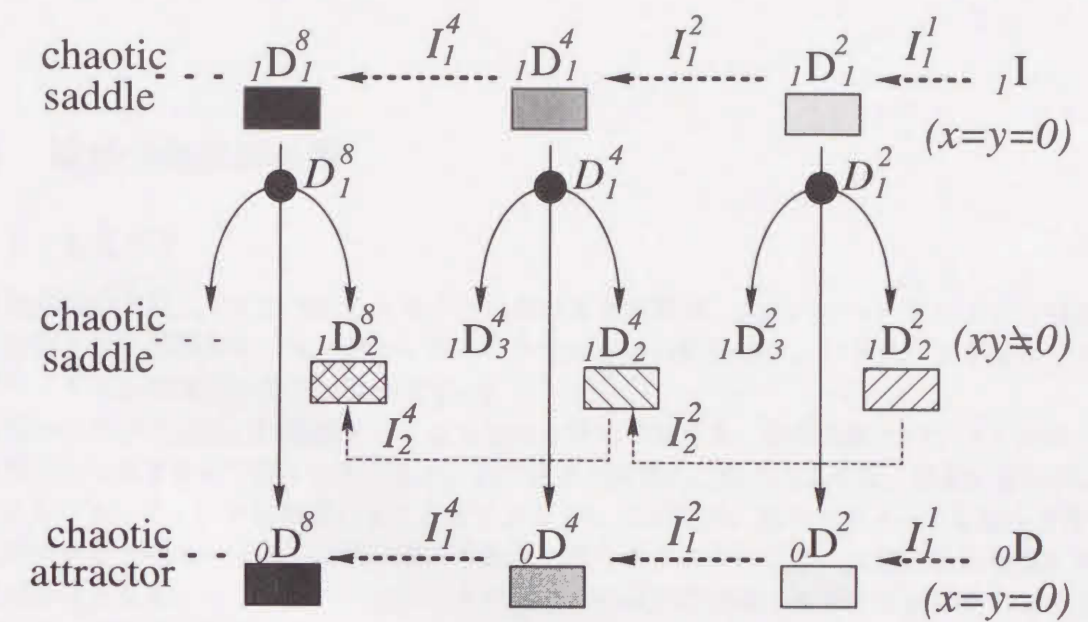


図 5.2.10: 図 5.2.9 において観測されるカオス状態への遷移の模式図. 斜体字と影の種類は図 5.2.9 と対応する. 実線は安定, 点線は不安定な周期解を表す.

第6章

自動追跡アルゴリズム

6.1 接線分岐曲線追跡

6.1.1 まえがき

非線形微分方程式で記述されるシステムにおける周期解が、式のパラメータによって軌道の位相的性質を変える現象を分岐現象という。この分岐現象の解析には、パラメータ平面上で分岐値をプロットした分岐図の作成が欠かせない。

分岐図の作成方法は、周期解を与える方程式と分岐の条件を、状態変数とパラメータの1つを未知数として連立させて解くものであり、方程式系が関数的に独立であれば、数値計算は Newton 法によるシューティング法を用いることができる [7]。このため、系のパラメータを微小変化させ、変化前の値を Newton 法の初期値に選ぶ手続きを繰り返すことにより、大域的な分岐図を求めることが可能となる。ところが、パラメータ平面上で接線分岐曲線にカusp点が存在する場合、この点においては連立方程式系のヤコビ行列が非正則となるため、カusp点の近傍で分岐集合が求められなくなる。従って分岐図を作成する際、カusp点を除いた分岐集合を独立に求め、後で接続させることが必要であった。もしくはカusp点の近傍でアルゴリズムを切替えなくてはならなかった [40]。

そこで本節では、カusp点で計算が止まるという欠点を克服し、初期値のみを与えれば後は自動的に分岐曲線を描くアルゴリズムを提案し、それを Duffing 方程式に応用して分岐図を求めた結果を報告する。

6.1.2 アルゴリズム

n 次元非自律系方程式を

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \quad x \in R^n, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^2 \quad (6.1.1)$$

とする。但し、 f は t に関して周期 2π の周期写像とする：

$$f(t + 2\pi, x, \lambda) = f(t, x, \lambda)$$

$t=0$ で初期値 $u \in R^n$ を出発する式 (6.1.1) の解を

$$x(t) = \varphi(t, u, \lambda) \quad (6.1.2)$$

とする. 式 (6.1.1) の右辺の関数 f が時間 t に関して 2π の周期を持っていることより, ポアンカレ写像 T_λ を

$$\begin{aligned} T_\lambda: R^n &\longrightarrow R^n \\ u &\longmapsto T_\lambda(u) = \varphi(2\pi, u, \lambda) \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

と定義すると, T_λ の固定点は

$$F(u, \lambda) = u - \varphi(2\pi, u, \lambda) = 0 \quad (6.1.4)$$

で与えられる. 式 (6.1.4) は $(u, \lambda) \in R^{n+1}$ に関する n 個の条件式となっている. 従って R^{n+1} で1つの曲線を与える.

以下固定点 (周期 2π の周期解) のみについて考える. m 周期点 (周期 $2m\pi$ の周期解) についても同様の議論ができる. その場合の条件式は

$$F(u, \lambda) = u - \varphi(2m\pi, u, \lambda) = 0$$

となる.

式 (6.1.4) の固定点に関する特性方程式は

$$\chi(\mu; u, \lambda) = \det(\mu I - DT_\lambda(u)) = 0 \quad (6.1.5)$$

である. ただし

$$DT_\lambda(u) = \frac{\partial}{\partial u} T_\lambda(u) = \frac{\partial}{\partial u} \varphi(2\pi, u, \lambda) \quad I: n \times n \text{ の単位行列}$$

である.

次に分岐の条件式を考えよう. まず表 6.1.1 に3つの余次元1の分岐条件・性質をまとめておく.

表 6.1.1: 分岐の条件とその性質.

名称	条件	軌道の性質
接線分岐 (G)	$\mu = 1$	周期解の発生・消滅
周期倍分岐 (I)	$\mu = -1$	周期解の分枝
Neimark-Sacker 分岐 (H)	$ \mu = 1, \mu \neq 1, -1$	準周期解の発生・消滅

今, 接線分岐曲線の追跡を考えると, 分岐の条件は

$$G(u, \lambda) = \chi(1; u, \lambda) = \det(I - DT_\lambda(u)) = 0 \quad (6.1.6)$$

である.

次に非退化カusp点の定義を与えるため次の集合を考える.

$$\Sigma = \{(u, \lambda) \in R^n \times R^2 \mid F(u, \lambda) = 0, G(u, \lambda) = 0\} \quad (6.1.7)$$

この集合のパラメータ化を

$$c: R \rightarrow \Sigma; s \mapsto c(s) \quad (6.1.8)$$

とする. ここで点 $p = (u, \lambda) \in \Sigma$ において $p = c(0)$ とする. パラメータ平面への写像 π_λ を

$$\pi_\lambda: R^n \times R^2 \rightarrow R^2; (u, \lambda) \mapsto \pi_\lambda(u, \lambda) = \lambda \quad (6.1.9)$$

とすると点 $p = (u, \lambda) \in \Sigma$ が非退化カusp点となる条件は次式となる.

$$\frac{d}{ds}(\pi_\lambda \circ c)(0) = 0, \quad \frac{d^2}{ds^2}(\pi_\lambda \circ c)(0) \neq 0 \quad (6.1.10)$$

空間 (u, λ) 内で, 固定点を与える式 (6.1.4) と分岐の条件式 (6.1.6) を満足する曲線を追跡するため, 次の行列式を定義する.

$$A(u_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial u_i} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial u_n} & \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial G}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial u_i} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial u_n} & \frac{\partial G}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial G}{\partial \lambda_2} \end{vmatrix} \quad (6.1.11)$$

ここで $\widehat{}$ は第 i 列の消去を意味するので $A(u_i)$ は $(n+1)$ 次の行列式となっている.

式 (6.1.4) (6.1.6) を微分して

$$\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial \lambda} d\lambda = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u} du + \frac{\partial G}{\partial \lambda} d\lambda = 0 \quad (6.1.12)$$

を得る. 行列式 $A(u_i)$ を用いて整理すると, 式 (6.1.12) の関係は

$$\frac{du_1}{A(u_1)} = \frac{du_2}{-A(u_2)} = \cdots = \frac{du_i}{(-1)^{i-1} A(u_i)} = \cdots = \frac{d\lambda_1}{(-1)^n A(\lambda_1)} = \frac{d\lambda_2}{(-1)^{n+1} A(\lambda_2)} \quad (6.1.13)$$

となる. 式 (6.1.13) を ds とおくことにより, 分岐曲線に沿ったベクトル場の方程式は

$$\frac{du_i}{ds} = (-1)^{i-1} A(u_i), \quad \frac{d\lambda_1}{ds} = (-1)^n A(\lambda_1), \quad \frac{d\lambda_2}{ds} = (-1)^{n+1} A(\lambda_2) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.1.14)$$

と求める. まとめて書くと

$$\frac{dc(s)}{ds} = W(c(s)) \quad (6.1.15)$$

となる [7]. ここで

$$\begin{aligned} c(s) &= \begin{bmatrix} u_1(s) & \cdots & u_n(s) & \lambda_1(s) & \lambda_2(s) \end{bmatrix}^T \\ W(c(s)) &= \begin{bmatrix} (-1)^0 A(u_1) & \cdots & (-1)^{n-1} A(u_n) & (-1)^n A(\lambda_1) & (-1)^{n+1} A(\lambda_2) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

である. 式 (6.1.15) の右辺は非退化カusp点で零になることはない. したがって式 (6.1.15) を追跡すればカusp点を含めた接線分岐曲線を自動追跡できることとなる. 具体的な数値計算ではポアンカレ写像から構成される理論式 (6.1.15) を求積できないため, これを差分スキームに変換した方程式を用いる. ここでは最も簡単な Euler 法を用いることにする. すなわち

$$c(s + \Delta s) = c(s) + \Delta s W(c(s)) \quad (6.1.16)$$

となる。したがってアルゴリズムは次のようになる。

ステップ(1) 初期値を求める：

$$c(s_0) = \begin{bmatrix} u_{1_0} & \cdots & u_{n_0} & \lambda_{1_0} & \lambda_{2_0} \end{bmatrix}^T \quad (6.1.17)$$

これは通常の接線分岐値を求めるアルゴリズムを用いて計算する。

ステップ(2) 差分スキームによる近似計算：式(6.1.16)：

$$c(s_1) = c(s_0 + \Delta s) = c(s_0) + \Delta s W(c(s_0))$$

によって新しい曲線上の点 s_1 を求める。

ステップ(3) Newton 法による修正：

ステップ(2)の簡単な差分近似では誤差が大きくなることが予想されるので、 s_1 を初期値とし、式(6.1.4)(6.1.6)を満たす分岐パラメータをNewton法により求める。

以上のアルゴリズムの模式図を図6.1.1に示す。すなわち、図6.1.1のように接線分岐集合に接するベクトル場(6.1.15)を解いて、それをパラメータ平面に射影することにより分岐曲線を求める。カusp点でもベクトル場は零とならないので連続的に分岐図が得られる。

(注意1) ステップ(3)においてNewton法を用いる場合、条件式の数 $(n+1)$ 個で変数が $(n+2)$ 個なので、使用する変数は絶対値が一番大きい $A(u_i)$ に使われている $(n+1)$ 個の変数とする。このことにより、ヤコビ行列が正則でなくなるという問題点は解決される。

(注意2) 上記のアルゴリズムでは分岐曲線上のカusp点と通常の点は同等に追跡される。したがって両者の間には数値的に追跡する上で計算上の難易度はあらわれない。

(注意3) 式(6.1.16)におけるきざみ幅 Δs は、一般の数値積分同様、方程式や分岐曲線の性質によって異なり、試行錯誤的に定める必要がある。ステップ(2)とステップ(3)で得られた解の差、あるいはステップ(3)におけるNewton法の収束回数などをうまく用いて Δs を自動的に変化させることも考えられる。このことに対する具体的アルゴリズムは今後の課題としたい。

(注意4) カusp点の検出は条件(6.1.10)の第1式を曲線上の点が満足するかどうかをみることによって実現できる。すなわち式(6.1.11)において $A(\lambda_1) = 0, A(\lambda_2) = 0$ をみればよい。

6.1.3 Duffing 方程式への応用例

具体的な例として、可飽和インダクタを有する共振回路のダイナミクスを表現しているDuffing方程式：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -ky - c_1 x - c_3 x^3 + B_0 + B \cos t \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

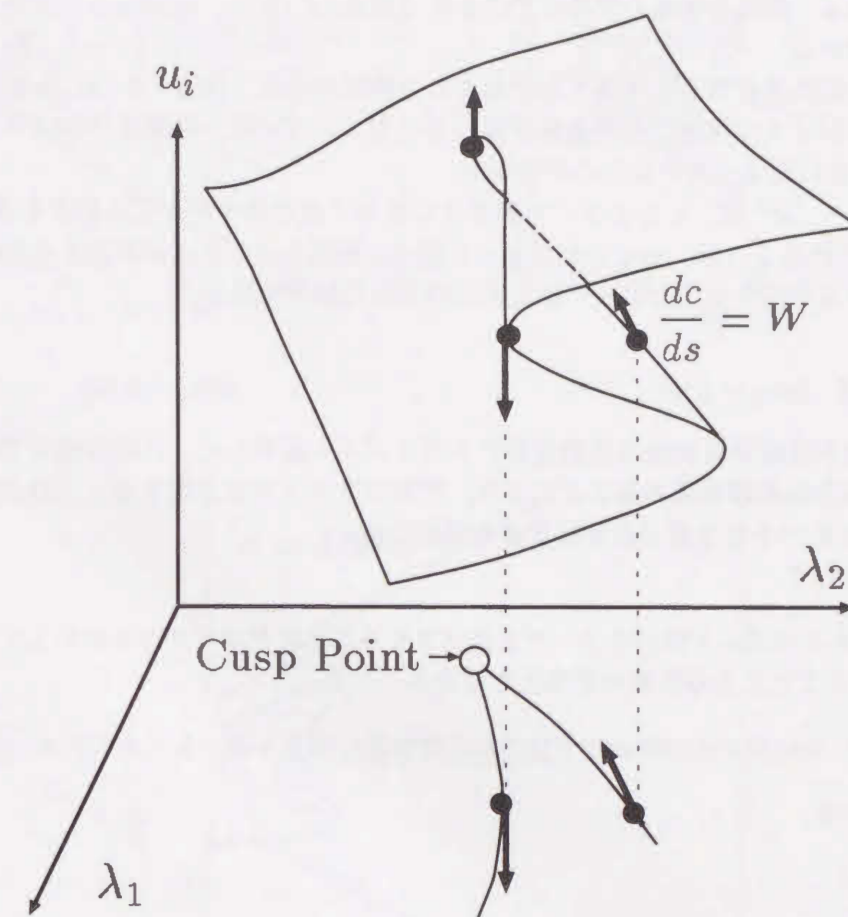


図 6.1.1: カusp点を含む接線分岐集合の模式図。

について、前節のアルゴリズムを適用し分岐曲線を求める。5つのパラメータ (k, c_1, c_3, B_0, B) のうち、2つのパラメータ $\lambda = (B, B_0)$ をとり、残りのパラメータは固定する。これは外力である直流電圧 B_0 と交流電圧の振幅 B を変化させた場合に、どのような周期振動がみられるかを問題とする分岐問題といえる。

Duffing 方程式 (6.1.18) において $c_1 = 0.0$, $c_3 = 1.0$ とした場合について分岐曲線を求めた結果を図 6.1.2, 図 6.1.3 に示す。網目を付けた領域の境界線において周期倍分岐が観察され、他の実線では接線分岐がみられる。接線分岐曲線のとがった先の部分はすべてカusp点となっているが、いずれの分岐曲線においても一筆書きで描くことができた。

図 6.1.2 (a) は BB_0 の小さな領域で存在する接線分岐と周期倍分岐の曲線を追跡した結果を示したものである。 BB_0 を大きくすることにより (図 6.1.2 (b)), 高調波共振現象が複雑に生じていることが分かる。

図 6.1.2 (c) は散逸係数 k を小さくした場合の分岐図である。図 6.1.2 (a) と比べると、 k を小さくすることにより全体的に分岐曲線が $B = 0$ に近まっている。周期倍分岐はその領域が分離し、かつ $B_0 = 0$ に近まっていることが分かる。

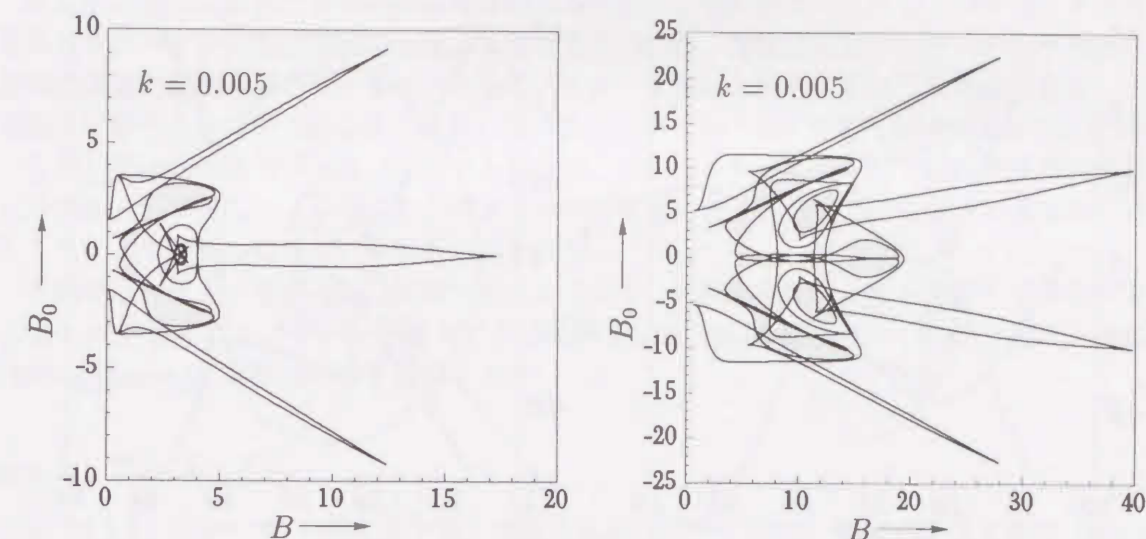
図 6.1.3 (a) ~ (c) は、 k を小さくすることにカusp点の発生が生じる様子を表す。図 6.1.3 (b), (c) に示されるように、小さいパラメータ領域に複数のカusp点が存在する分岐図は、自動追跡アルゴリズムを用いることによりはじめて得られた結果である。

6.1.4 むすび

カusp点を含む接線分岐曲線の自動追跡アルゴリズムを提案した。この手法を Duffing 方程式へ応用して接線分岐曲線を求めることにより、アルゴリズムの正当性を示し、Duffing 方程式において散逸係数 k の小さな値での分岐現象を解析した。

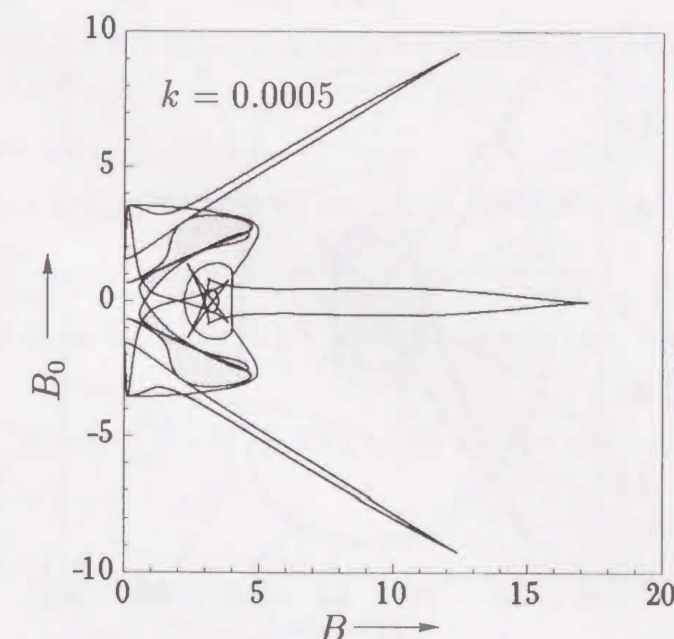
今後の課題として

- 今回のアルゴリズムではパラメータを変化させるごとにヤコビアンを計算しているが、これを工夫することによる計算の簡略化をはかる、
- 高次元系への応用とその場合に予想される計算量の増大を避けるためのアルゴリズムの検討、などが挙げられる。



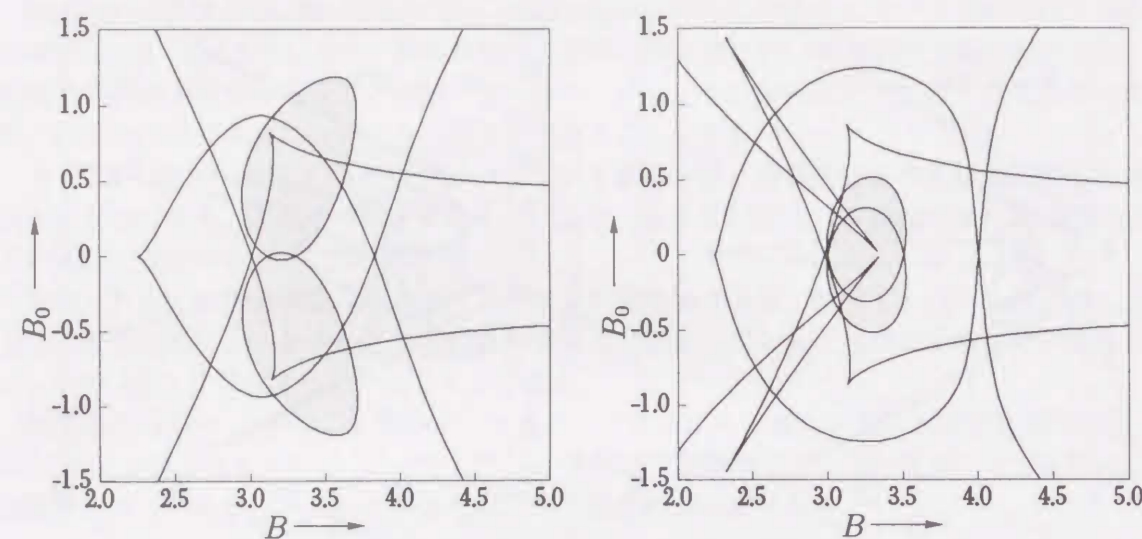
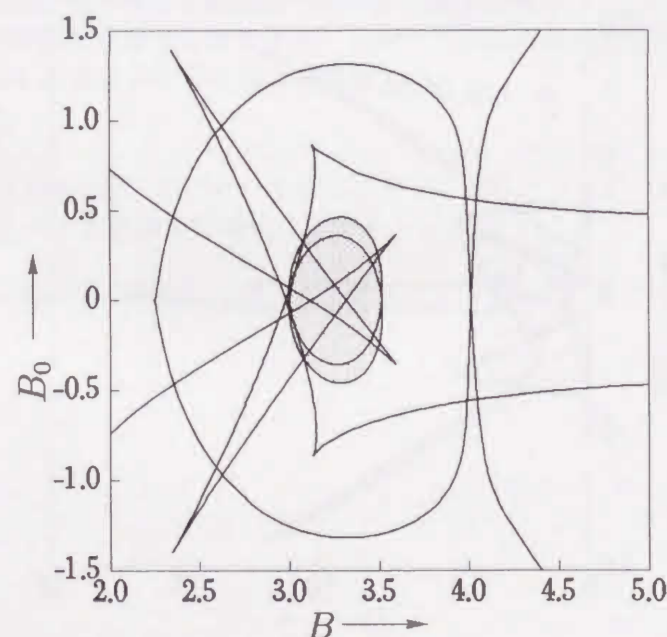
(a) $k = 0.005$.

(b) $k = 0.005$.



(c) $k = 0.0005$.

図 6.1.2: Duffing 方程式 (6.1.18) の接線分岐集合。

(a) $k = 0.05$.(b) $k = 0.01$.(c) $k = 0.005$.図 6.1.3: k を小さくすることにより生じるカusp点.

6.2 固定点多様体追跡

6.2.1 まえがき

定量的に解くことのできない非線形常微分方程式の定性的研究のために、パラメータ平面で分岐集合をプロットした分岐図の作成が有用である [7, 18]. 分岐図によりパラメータ平面での解の位相的性質の変化が分かり、カオスとなるパラメータ領域を特定することも可能となる. また近年盛んに研究されている結合発振器系においては、分岐図により同期化領域を知ることができる.

しかし接線分岐集合が複雑に存在する場合は、分岐図を作成しただけでは解の位相的性質の変化を知るのは難しい. その場合、パラメータの変化に対する固定点や周期点の多様体を計算することにより振幅の変化などが解析可能となる.

本節ではベクトル場をうまく定義することにより、接線分岐集合上でも連続的に多様体を求めることができるアルゴリズムを提案する. この方法は 6.1 節の方法の一応用である. 例として Duffing-Rayleigh 方程式の解析結果を示す.

6.2.2 アルゴリズム

式 (6.1.1) において $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. 空間 $(u, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 内で、固定点を与える式 (6.1.4) を満足する曲線を追跡するため、次の行列式を定義する.

$$A(u_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_i} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial u_n} & \frac{\partial F}{\partial \lambda} \end{vmatrix} \quad (6.2.1)$$

ここで $\bar{\cdot}$ は第 i 列の消去を意味するので $A(u_i)$ は n 次の行列式となっている.

式 (6.1.4) を微分して

$$\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial \lambda} d\lambda = 0 \quad (6.2.2)$$

となり、行列式 $A(u_i)$ を用いて整理すると、式 (6.2.2) の関係は

$$\frac{du_1}{A(u_1)} = \frac{du_2}{-A(u_2)} = \cdots = \frac{du_i}{(-1)^{i-1} A(u_i)} = \cdots = \frac{d\lambda}{(-1)^n A(\lambda)} \quad (6.2.3)$$

となる. 式 (6.2.3) を ds とおくことにより、多様体に沿ったベクトル場の方程式を次式で定義する.

$$\frac{du_i}{ds} = (-1)^{i-1} A(u_i), \quad \frac{d\lambda}{ds} = (-1)^n A(\lambda), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.2.4)$$

ベクトル記法を用いると

$$\frac{dc(s)}{ds} = W(c(s)) \quad (6.2.5)$$

となる [7]. ここで

$$c(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) & \cdots & u_n(s) & \lambda(s) \end{bmatrix}^T$$

$$W(c(s)) = \begin{bmatrix} (-1)^0 A(u_1) & \cdots & (-1)^{n-1} A(u_n) & (-1)^n A(\lambda) \end{bmatrix}^T$$

とおいた. 式 (6.2.5) の右辺は接線分岐集合上で零になることはない. したがって式 (6.2.5) を追跡すれば接線分岐を含めた多様体を自動追跡できることとなる. 具体的な数値計算ではポアンカレ写像から構成される理論式 (6.2.5) を求積できないため、これを差分スキームに変換した方程式を用いる. ここでは最も簡単な Euler 法を用いることにする. すなわち

$$c(s + \Delta s) = c(s) + \Delta s W(c(s)) \quad (6.2.6)$$

となる。

したがってアルゴリズムは次のようになる。

(1) 初期値を求める：

$$c(s_0) = [u_{1_0} \quad \cdots \quad u_{n_0} \quad \lambda_0]^T$$

これは通常の固定点を求めるアルゴリズム [7] を用いて計算する。

(2) 差分スキーム式 (6.2.6)

$$c(s_1) = c(s_0 + \Delta s) = c(s_0) + \Delta s W(c(s_0))$$

によって新しい曲線上の点 $c(s_1)$ を求める。

(3) これでは簡単な差分近似のため誤差が大きくなることが予想されるので、 $c(s_1)$ を初期値とし、式 (6.1.4) を満たす固定点を Newton 法により求める。このとき式の数が n 個で変数の数が $(n+1)$ 個なので、用いる変数は絶対値が一番大きい $A(u_i)$ に使われている n 個の変数とする。このことにより、カusp点以外ではヤコビ行列をいつも正則に保つことができる。

6.2.3 Duffing-Rayleigh 方程式への応用例

以上のアルゴリズムに基づき、直流成分を含む周期的外力を印加した Duffing-Rayleigh 型発振器を表す方程式：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \epsilon(1 - \gamma y^2)y - x^3 + B_0 + B \cos \nu t \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

の多様体を求めた結果を示す。パラメータとして B, B_0 を選び、他は $\epsilon = 0.2, \gamma = 1.0, \nu = 1.5$ に固定した。

式 (6.2.7) では Neimark-Sacker 分岐が存在し、その分岐集合上で特性乗数が特別な角度となるところにおいて、さまざまな分数調波同期化現象がみられる。ここではアルゴリズムの正当性を示すために、一番単純な基本調波周期解、すなわち固定点の多様体について考える。

はじめに図 6.2.1 に固定点の接線分岐集合を示す。黒丸 C_1, C_2 はカusp点を表し、接線分岐集合で囲まれた領域では3個の固定点が存在する。 $B_0 > 0$ でそれらの固定点がどのように存在するかを調べるために、多様体を連続的に求めた結果を図 6.2.2 に示す。 $B_0 = 0.6$ では固定点は1つであるが、 B_0 を小さくすることにより、多様体が折れ曲がり新たな固定点対が発生する。これら多様体の折れ曲がりをパラメータ平面に射影したのが接線分岐集合となる (図 6.2.2 の点線)。

本節でのアルゴリズムを用いて異なる B_0 での多様体曲線をいくつか求め、それを3次元で描くことにより、カuspを含む接線分岐集合の構造がよく分かるようになる。また固定点の特性乗数も同時に計算することにより、その多様体の安定性も調べることができる。

6.2.4 むすび

接線分岐集合を含む多様体を連続的に求めるアルゴリズムを提案した。この手法を Duffing-Rayleigh 方程式へ応用して多様体を求めることにより、アルゴリズムの正当性および有用性を示した。

縦軸のノルムのとりかたによっては多様体が交差することがあるので、そのことに関する検討は今後の課題である。

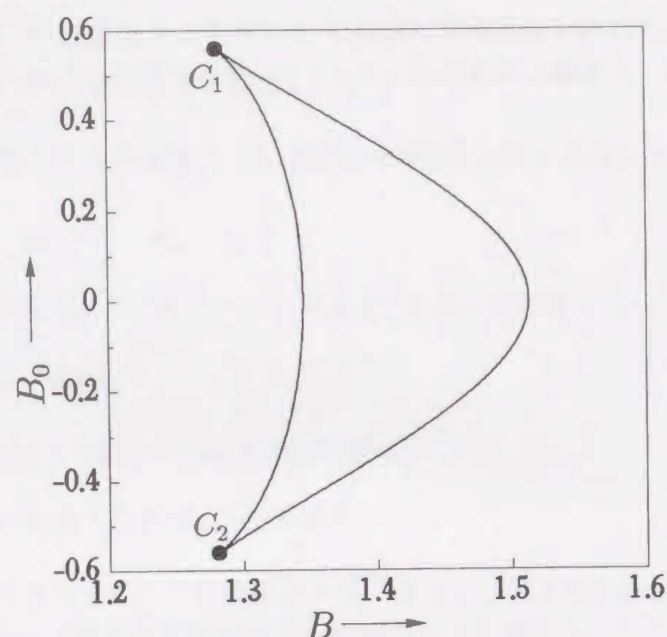


図 6.2.1: 式 (6.2.7) にみられる固定点の接線分岐集合.

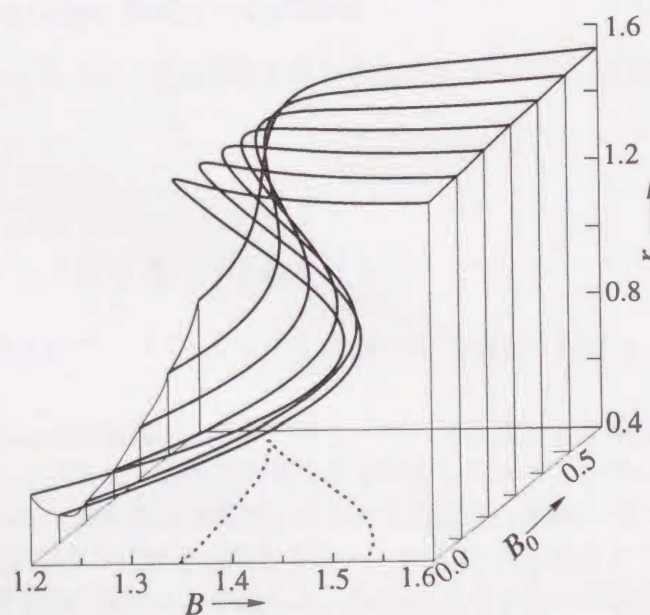


図 6.2.2: 固定点多様体. パラメータ平面 (B, B_0) の点線は図 6.2.1 の接線分岐集合に対応する. 縦軸は固定点のノルムを表す.

第7章

むすび

本論文では、結合発振器系の解析 (第3・4章)、結合発振器系でよく起こる余次元の高い分岐とカオスの解析 (第5章)、第3～5章における数値計算において必要となるアルゴリズムの開発 (第6章) を行った。結合発振器系の解析においては、対称性により全ての平衡点と周期解の分類を行い、それらの分岐集合を求めることにより、遷移状態が明らかになった。従来あまり解析されていない周期解の分岐集合を求めることにより、BVP 発振器を2個、抵抗で結合した系においてもカオス・アトラクタが発生することを数値的に示した。

各章ごとにまとめると以下ようになる：

第3章では結合発振器系の最も基本となる、発振器を2個、抵抗で電圧結合した系の平衡点と周期解の解析を行なった。はじめに系にみられる対称性を用いて、平衡点と周期解をそれぞれ4, 8種類に分類した。それぞれの解の分岐集合を数値計算により求めることにより、異なる対称性をもつ平衡点・周期解の間での遷移を示した。対称性をもたない周期解は周期倍分岐の連鎖により、カオス振動解へと進展した。このようなシンプルな結合系でのカオスの存在を示したのは、筆者らの知る限りはじめてである。

第4章では巡回結合した発振器系の平衡点と周期解の分岐現象を解析した。4.3節では単体の発振器が発振しないパラメータ値に固定し、 n 個、抵抗で環状に一方方向と双方向に結合した系を考えた。対称性をもつ平衡点に対するヤコビ行列をブロック対角化することにより、特定の発振器の個数だけでなく、一般的な場合についても分岐集合が求められることを示した。平衡点の分岐集合を求めることにより、次の結果を得た。

一方方向 (奇数)：平衡点 (原点) が Hopf 分岐集合を横切ることにより n 相発振が観察される。

一方方向 (偶数)： $n < 12$ では原点が D 型分枝により不安定になってから Hopf 分岐集合を横切るため、安定な発振は得られない。 $n \geq 12$ では Hopf 分岐集合の形状が変化し、原点は D 型分枝よりも先に Hopf 分岐に出会い、安定な n 相発振が得られる。

双方向：Hopf 分岐が存在しないために、安定・不安定に関わらず、発振は得られない。

4.4.1 と 4.4.2 節では単体の発振器が発振する状態で巡回結合した系の周期解の分岐を考えた。周期解の分岐を扱うために発振器の個数を3個に限定して解析を行った。対称性により平衡点と周期解をそれぞれ3, 8種類に分類した。分類した解の分岐集合を求めることにより、異なる対称

性をもつ解の間の遷移を示した。分岐集合の数値計算において、周期倍分岐の連鎖による対称性のないカオス・リベラを観測した。4.4.3節では一方向と双方向の結合を混合させて結合部分に2面体群 D_3 と4元数群 Q_8 をもつ結合回路を構成した。 D_3 対称回路では5種類の安定な周期解と、1つの不安定な周期解を得た。5種類の安定な周期解のうち1つは、通常の発振器を3個結合した D_3 対称回路において得ることのできなかった逆相発振パターンであった。 Q_8 対称回路では四相または八相解は得られず、同相と逆相解を4種類得た。

第5章では結合発振器系などの対称性の強い系においてよく起こると考えられる、余次元2, 3の分岐の分岐について解析した。5.1節では P^2 分岐の連鎖を調べ、文献[5]においては議論されていない準周期解（ポアンカレ写像での不変閉曲線）の分岐も含めた分岐構造を明らかにした。固定点が倍周期化されるのに従い、不変閉曲線も巻数が倍になり、倍になる前の不変閉曲線と消滅する。5.2節では周期倍分岐集合どうしの交わりから、D型分枝と周期倍分岐の交わりによる余次元3の分岐の連鎖が生じ、カオスへと遷移する様子を示した。結果生じるカオスには2つのタイプ：(1) カオス・アトラクタ、(2) サドル型カオスがあることがわかった。後者のカオスは分岐集合を求めることによりのみ、その存在を示すことが可能となる。

第6章では、分岐集合を数値計算により求める場合の便利なアルゴリズムを提案した。接線分岐集合を計算する場合、従来のアルゴリズムでは余次元2の分岐の1つであるカusp点で計算が止まっていたが、6.1節のアルゴリズムを用いることにより、連続的に接線分岐集合を求めることが可能となった。Duffing 方程式での例題を示し、複雑にカusp点が存在するパラメータ領域での接線分岐集合を求め、複雑な共振現象の解析を行った。6.2節では、固定点多様体を追跡する場合に、接線分岐集合上でも止まらずに連続的に追跡することが可能なアルゴリズムを提案した。Duffing-Rayleigh 方程式に応用することにより、アルゴリズムの正当性を示した。

本研究の延長線上にある興味深い問題としては

- パラメータを変化させることにより、一方向性結合から双方向性結合への遷移を調べること。
- D型分枝と他の余次元1の分岐の交わりによる余次元3の分岐を系統的に解析すること。
- 与えられた群をもつ結合発振器系を構成し、種々の発振モードを発生させること。

などがあり、現在研究を進めている。

付録 A

群の乗積表

A.1 巡回群 C_3 と二面体群 D_3

3個の発振器を一方向性結合した場合の対称操作の集合：

$$\Gamma_1 = \{I_6, P_1, P_1^2, \bar{I}_6, \bar{I}_6 P_1, \bar{I}_6 P_1^2\}$$

及び双方向性結合した場合の対称操作の集合：

$$\Gamma_2 = \{I_6, P_1, P_1^2, P_2, P_1 P_2, P_1^2 P_2, \bar{I}_6, \bar{I}_6 P_1, \bar{I}_6 P_1^2, \bar{I}_6 P_2, \bar{I}_6 P_1 P_2, \bar{I}_6 P_1^2 P_2\}$$

は行列の積に関して群をなす。それらの群の乗積表を表 A.1.1, A.1.2 に示す。これらの表より共役類（一方向性結合）：

$$\{I_6\}, \{P_1\}, \{P_1^2\}, \{\bar{I}_6\}, \{\bar{I}_6 P_1\}, \{\bar{I}_6 P_1^2\}$$

（双方向性結合）：

$$\{I_6\}, \{P_1, P_1^2\}, \{P_2, P_1 P_2, P_1^2 P_2\}, \{\bar{I}_6\}, \{\bar{I}_6 P_1, \bar{I}_6 P_1^2\}, \{\bar{I}_6 P_2, \bar{I}_6 P_1 P_2, \bar{I}_6 P_1^2 P_2\}$$

を簡単にみつけることができる。

A.2 4元数群 Q_8

4元数群 Q_8 ：

$$Q_8 = \{I_{16}, Q_3, Q_3^2, Q_3^3, Q_4, Q_3 Q_4, Q_3^2 Q_4, Q_3^3 Q_4\}$$

の乗積表を表 A.2.1 に示す。

表 A.1.1: Γ_1 (3 個の一方方向性結合) の乗積表.

	I_6	P_1	P_1^2	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2$
I_6	I_6	P_1	P_1^2	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2$
P_1	P_1	P_1^2	I_6	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2$	\bar{I}_6
P_1^2	P_1^2	I_6	P_1	$\bar{I}_6 P_1^2$	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1$
\bar{I}_6	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2$	I_6	P_1	P_1^2
$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2$	\bar{I}_6	P_1	P_1^2	I_6
$\bar{I}_6 P_1^2$	$\bar{I}_6 P_1^2$	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1$	P_1^2	I_6	P_1

表 A.1.2: Γ_2 (3 個の双方向性結合) の乗積表.

	I_6	P_1	P_1^2	P_2	$P_1 P_2$	$P_1^2 P_2$
I_6	I_6	P_1	P_1^2	P_2	$P_1 P_2$	$P_1^2 P_2$
P_1	P_1	P_1^2	I_6	$P_1 P_2$	$P_1^2 P_2$	P_2
P_1^2	P_1^2	I_6	P_1	$P_1^2 P_2$	P_2	$P_1 P_2$
P_2	P_2	$P_1^2 P_2$	$P_1 P_2$	I_6	P_1^2	P_1
$P_1 P_2$	$P_1 P_2$	P_2	$P_1^2 P_2$	P_1	I_6	P_1^2
$P_1^2 P_2$	$P_1^2 P_2$	$P_1 P_2$	P_2	P_1^2	P_1	I_6
\bar{I}_6	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2$	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$
$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2$	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_2$
$\bar{I}_6 P_1^2$	$\bar{I}_6 P_1^2$	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$
$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1^2$	$\bar{I}_6 P_1$
$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_1$	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1^2$
$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2$	$\bar{I}_6 P_1$	\bar{I}_6

	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2$	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$
I_6	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2$	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$
P_1	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2$	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_2$
P_1^2	$\bar{I}_6 P_1^2$	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$
P_2	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1^2$	$\bar{I}_6 P_1$
$P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_1$	\bar{I}_6	$\bar{I}_6 P_1^2$
$P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$\bar{I}_6 P_2$	$\bar{I}_6 P_1^2$	$\bar{I}_6 P_1$	\bar{I}_6
\bar{I}_6	I_6	P_1	P_1^2	P_2	$P_1 P_2$	$P_1^2 P_2$
$\bar{I}_6 P_1$	P_1	P_1^2	I_6	$P_1 P_2$	$P_1^2 P_2$	P_2
$\bar{I}_6 P_1^2$	P_1^2	I_6	P_1	$P_1^2 P_2$	P_2	$P_1 P_2$
$\bar{I}_6 P_2$	P_2	$P_1^2 P_2$	$P_1 P_2$	I_6	P_1^2	P_1
$\bar{I}_6 P_1 P_2$	$P_1 P_2$	P_2	$P_1^2 P_2$	P_1	I_6	P_1^2
$\bar{I}_6 P_1^2 P_2$	$P_1^2 P_2$	$P_1 P_2$	P_2	P_1^2	P_1	I_6

表 A.2.1: 4 元数群の乗積表.

	I_{16}	Q_3	Q_3^2	Q_3^3	Q_4	$Q_3 Q_4$	$Q_3^2 Q_4$	$Q_3^3 Q_4$
I_{16}	I_{16}	Q_3	Q_3^2	Q_3^3	Q_4	$Q_3 Q_4$	$Q_3^2 Q_4$	$Q_3^3 Q_4$
Q_3	Q_3	Q_3^2	Q_3^3	I_{16}	$Q_3 Q_4$	$Q_3^2 Q_4$	$Q_3^3 Q_4$	Q_4
Q_3^2	Q_3^2	Q_3^3	I_{16}	Q_3	$Q_3^2 Q_4$	$Q_3^3 Q_4$	Q_4	$Q_3 Q_4$
Q_3^3	Q_3^3	I_{16}	Q_3	Q_3^2	$Q_3^3 Q_4$	Q_4	$Q_3 Q_4$	$Q_3^2 Q_4$
Q_4	Q_4	$Q_3^3 Q_4$	$Q_3^2 Q_4$	$Q_3 Q_4$	Q_3^2	Q_3	I_{16}	Q_3^3
$Q_3 Q_4$	$Q_3 Q_4$	Q_4	$Q_3^3 Q_4$	$Q_3^2 Q_4$	Q_3^3	Q_3^2	Q_3	I_{16}
$Q_3^2 Q_4$	$Q_3^2 Q_4$	$Q_3 Q_4$	Q_4	$Q_3^3 Q_4$	I_{16}	Q_3^3	Q_3^2	Q_3
$Q_3^3 Q_4$	$Q_3^3 Q_4$	$Q_3^2 Q_4$	$Q_3 Q_4$	Q_4	Q_3	I_{16}	Q_3^3	Q_3^2

付録 B

余次元の高い分岐の分類

系に対称性がみられる場合の余次元の高い分岐についてまとめる。記号は第2章参照。

B.1 周期倍分岐どうしの交わり

周期倍分岐どうしの交わりによる余次元2の分岐について、解の発生する方向と位相的性質により分類を行うと、以下に示す8種類に分類できる。図 B.1.1～図 B.1.4 において、固定点の周期倍分岐集合 I_1 と I_2 が黒丸で交わることに、2周期点の D 型分岐集合 D_1^2 と D_2^2 が発生する。

● ケース (1)

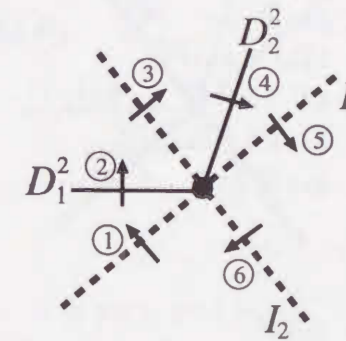
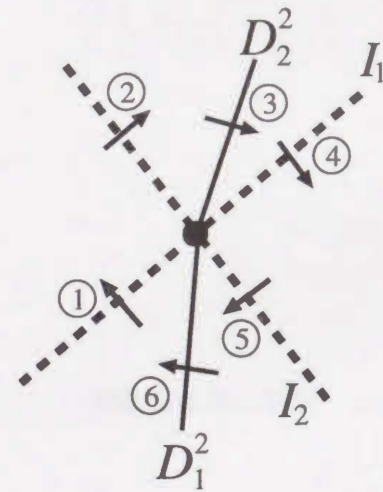


図 B.1.1: I^2 分岐 (1)。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} & {}_k D \rightarrow {}_{k+1} I + {}_k D^2 \\ \textcircled{2} & {}_k D^2 \rightarrow {}_{k+1} D^2 + 2{}_k D^2 \\ & ({}_k D^2 + 2{}_{k+1} D^2 \rightarrow {}_{k+1} D^2) \\ \textcircled{3} & {}_{k+1} I \rightarrow {}_{k+2} D + {}_{k+1} D^2 \\ \textcircled{4} & {}_{k+1} D^2 + 2{}_k D^2 \rightarrow {}_k D^2 \\ & ({}_{k+1} D^2 \rightarrow 2{}_{k+1} D^2 + {}_k D^2) \\ \textcircled{5} & {}_{k+2} D + {}_{k+1} D^2 \rightarrow {}_{k+1} I \\ \textcircled{6} & {}_{k+1} I + {}_k D^2 \rightarrow {}_k D \end{array} \right. \quad (\text{B.1.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} & {}_k I \rightarrow {}_{k+1} D + {}_k D^2 \\ \textcircled{2} & {}_k D^2 \rightarrow {}_{k+1} D^2 + 2{}_k D^2 \\ & ({}_k D^2 + 2{}_{k+1} D^2 \rightarrow {}_{k+1} D^2) \\ \textcircled{3} & {}_{k+1} D \rightarrow {}_{k+2} I + {}_{k+1} D^2 \\ \textcircled{4} & {}_{k+1} D^2 + 2{}_k D^2 \rightarrow {}_k D^2 \\ & ({}_{k+1} D^2 \rightarrow 2{}_{k+1} D^2 + {}_k D^2) \\ \textcircled{5} & {}_{k+2} I + {}_{k+1} D^2 \rightarrow {}_{k+1} D \\ \textcircled{6} & {}_{k+1} D + {}_k D^2 \rightarrow {}_k D \end{array} \right. \quad (\text{B.1.2})$$

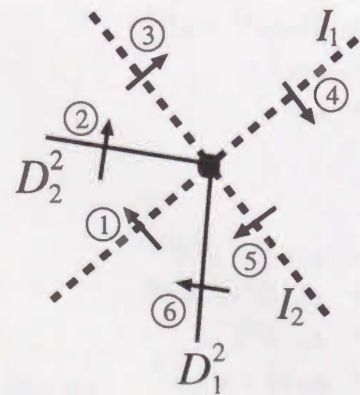
● ケース (2)

図 B.1.2: I^2 分岐 (2).

$$\begin{cases} \textcircled{1} & kD + k+1D^2 \rightarrow k+1I \\ \textcircled{2} & k+1I \rightarrow k+2D + k+1D^2 \\ \textcircled{3} & k+1D^2 \rightarrow kD^2 + 2k+1D^2 \\ \textcircled{4} & k+2D \rightarrow k+1I + k+2D^2 \\ \textcircled{5} & k+1I + kD^2 \rightarrow kD \\ \textcircled{6} & k+2D^2 + 2k+1D^2 \rightarrow k+1D^2 \end{cases} \quad (\text{B.1.3})$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} & kI + k+1D^2 \rightarrow k+1D \\ \textcircled{2} & k+1D \rightarrow k+2I + k+1D^2 \\ \textcircled{3} & k+1D^2 \rightarrow kD^2 + 2k+1D^2 \\ \textcircled{4} & k+2I \rightarrow k+1D + k+2D^2 \\ \textcircled{5} & k+1D + kD^2 \rightarrow kI \\ \textcircled{6} & k+2D^2 + 2k+1D^2 \rightarrow k+1D^2 \end{cases} \quad (\text{B.1.4})$$

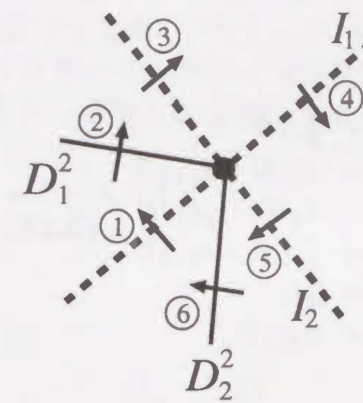
● ケース (3)

図 B.1.3: I^2 分岐 (3).

$$\begin{cases} \textcircled{1} & kD + k+1D^2 \rightarrow k+1I \\ \textcircled{2} & k+1D^2 + 2k+2D^2 \rightarrow k+2D^2 \\ & (k+1D^2 \rightarrow 2k+1D^2 + k+2D^2) \\ \textcircled{3} & k+1I + k+2D^2 \rightarrow k+2D \\ \textcircled{4} & k+2D \rightarrow k+1I + k+2D^2 \\ \textcircled{5} & k+1I \rightarrow kD + k+1D^2 \\ \textcircled{6} & k+2D^2 \rightarrow k+1D^2 + 2k+2D^2 \\ & (k+2D^2 + 2k+1D^2 \rightarrow k+1D^2) \end{cases} \quad (\text{B.1.5})$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} & kI + k+1D^2 \rightarrow k+1D \\ \textcircled{2} & k+1D^2 + 2k+2D^2 \rightarrow k+2D^2 \\ & (k+1D^2 \rightarrow 2k+1D^2 + k+2D^2) \\ \textcircled{3} & k+1D + k+2D^2 \rightarrow k+2I \\ \textcircled{4} & k+2I \rightarrow k+1D + k+2D^2 \\ \textcircled{5} & k+1D \rightarrow kI + k+1D^2 \\ \textcircled{6} & k+2D^2 \rightarrow k+1D^2 + 2k+2D^2 \\ & (k+2D^2 + 2k+1D^2 \rightarrow k+1D^2) \end{cases} \quad (\text{B.1.6})$$

● ケース (4)

図 B.1.4: I^2 分岐 (4).

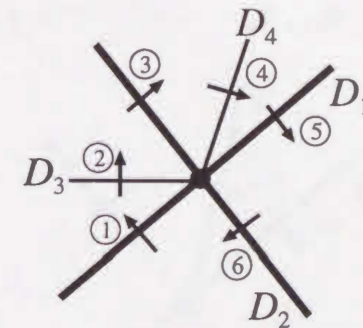
$$\begin{cases} \textcircled{1} & kD \rightarrow k+1I + kD^2 \\ \textcircled{2} & kD^2 + 2k+1D^2 \rightarrow k+1D^2 \\ \textcircled{3} & k+1I + k+2D^2 \rightarrow k+2D \\ \textcircled{4} & k+2D + k+1D^2 \rightarrow k+1I \\ \textcircled{5} & k+1I \rightarrow kD + k+1D^2 \\ \textcircled{6} & k+1D^2 \rightarrow k+2D^2 + 2k+1D^2 \end{cases} \quad (\text{B.1.7})$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} & kI \rightarrow k+1D + kD^2 \\ \textcircled{2} & kD^2 + 2k+1D^2 \rightarrow k+1D^2 \\ \textcircled{3} & k+1D + k+2D^2 \rightarrow k+2I \\ \textcircled{4} & k+2I + k+1D^2 \rightarrow k+1D \\ \textcircled{5} & k+1D \rightarrow kI + k+1D^2 \\ \textcircled{6} & k+1D^2 \rightarrow k+2D^2 + 2k+1D^2 \end{cases} \quad (\text{B.1.8})$$

B.2 D 型分枝どうしの交わり

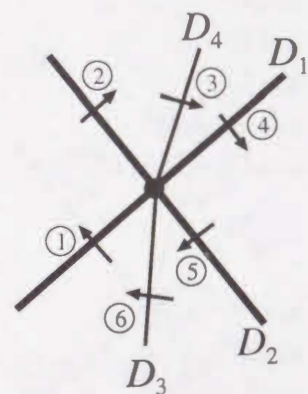
D 型分枝どうしの交わりによる余次元 4 の分岐について、解の発生する方向と位相的性質により分類を行うと、以下に示す 4 種類に分類できる (固定点が D タイプのみを示した. D を I タイプにおきかえることにより倍の 8 種類存在する). 図 B.2.1~図 B.2.4 において、固定点の D 型分枝集合 D_1 と D_2 が黒丸で交わることにより, D_1 と D_2 により発生した固定点の D 型分枝集合 D_3 と D_4 が発生する.

● ケース (1)

図 B.2.1: D^2 分岐 (1).

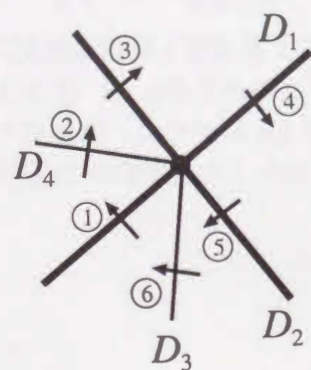
$$\begin{cases} \textcircled{1} & kD \rightarrow k+1D + 2kD \\ \textcircled{2} & 2kD \rightarrow 2k+1D + 4kD \\ & (2kD + 4k+1D \rightarrow 2k+1D) \\ \textcircled{3} & k+1D \rightarrow k+2D + 2k+1D \\ \textcircled{4} & 2k+1D + 4kD \rightarrow 2kD \\ & (2k+1D \rightarrow 4k+1D + 2kD) \\ \textcircled{5} & k+2D + 2k+1D \rightarrow k+1D \\ \textcircled{6} & k+1D + 2kD \rightarrow kD \end{cases} \quad (\text{B.2.1})$$

● ケース (2)

図 B.2.2: D^2 分岐 (2).

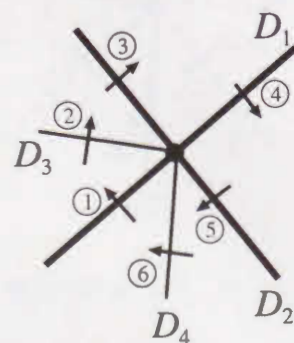
$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} & kD + 2_{k+1}D \rightarrow k_{+1}D \\ \textcircled{2} & k_{+1}D \rightarrow k_{+2}D + 2_{k+1}D \\ \textcircled{3} & 2_{k+1}D \rightarrow 2_kD + 4_{k+1}D \\ \textcircled{4} & k_{+2}D \rightarrow k_{+1}D + 2_{k+2}D \\ \textcircled{5} & k_{+1}D + 2_kD \rightarrow kD \\ \textcircled{6} & 2_{k+2}D + 4_{k+1}D \rightarrow 2_{k+1}D \end{array} \right. \quad (\text{B.2.2})$$

● ケース (3)

図 B.2.3: D^2 分岐 (3).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} & kD + 2_{k+1}D \rightarrow k_{+1}D \\ \textcircled{2} & 2_{k+1}D + 4_{k+2}D \rightarrow 2_{k+2}D \\ & (2_{k+1}D \rightarrow 4_{k+1}D + 2_{k+2}D) \\ \textcircled{3} & k_{+1}D + 2_{k+2}D \rightarrow k_{+2}D \\ \textcircled{4} & k_{+2}D \rightarrow k_{+1}D + 2_{k+2}D \\ \textcircled{5} & k_{+1}D \rightarrow kD + 2_{k+1}D \\ \textcircled{6} & 2_{k+2}D \rightarrow 2_{k+1}D + 4_{k+2}D \\ & (2_{k+2}D + 4_{k+1}D \rightarrow 2_{k+1}D) \end{array} \right. \quad (\text{B.2.3})$$

● ケース (4)

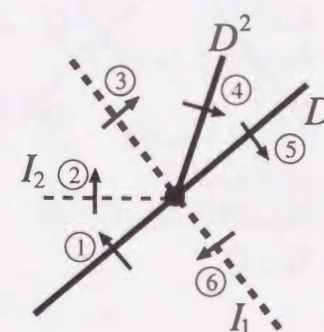
図 B.2.4: D^2 分岐 (4).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} & kD \rightarrow k_{+1}D + 2_kD \\ \textcircled{2} & 2_kD + 4_{k+1}D \rightarrow 2_{k+1}D \\ \textcircled{3} & k_{+1}D + 2_{k+2}D \rightarrow k_{+2}D \\ \textcircled{4} & k_{+2}D + 2_{k+1}D \rightarrow k_{+1}D \\ \textcircled{5} & k_{+1}D \rightarrow kD + 2_{k+1}D \\ \textcircled{6} & 2_{k+1}D \rightarrow 2_{k+2}D + 4_{k+1}D \end{array} \right. \quad (\text{B.2.4})$$

B.3 D 型分枝と周期倍分岐の交わり

D 型分枝と周期倍分岐の交わりによる余次元 3 の分岐について、解の発生する方向と位相的性質により分類を行うと、以下に示す 8 種類に分類できる。図 B.3.1～図 B.3.4 において、固定点の D 型分枝集合 D と周期倍分岐集合 I_1 が黒丸で交わることで、固定点の周期倍分岐集合 I_2 と 2 周期点の D 型分枝集合 D^2 が発生する。

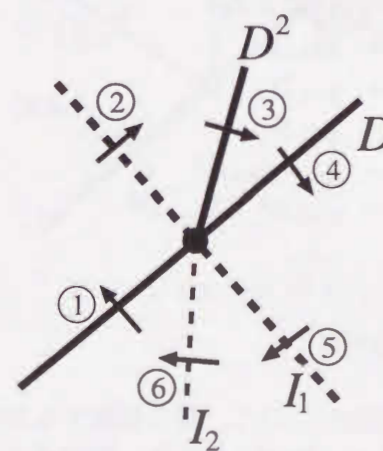
● ケース (1)

図 B.3.1: DI 分岐 (1).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} & kD \rightarrow k_{+1}D + 2_kD \\ \textcircled{2} & 2_kD \rightarrow 2_{k+1}I + 2_kD^2 \\ & (2_kD + 2_{k+1}D^2 \rightarrow 2_{k+1}I) \\ \textcircled{3} & k_{+1}D \rightarrow k_{+2}I + k_{+1}D^2 \\ \textcircled{4} & k_{+1}D^2 + 2_kD^2 \rightarrow kD^2 \\ & (k_{+1}D^2 \rightarrow 2_{k+1}D^2 + kD^2) \\ \textcircled{5} & k_{+2}I + 2_{k+1}I \rightarrow k_{+1}I \\ \textcircled{6} & k_{+1}I + kD^2 \rightarrow kD \end{array} \right. \quad (\text{B.3.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} & kI \rightarrow k_{+1}I + 2_kI \\ \textcircled{2} & 2_kI \rightarrow 2_{k+1}D + 2_kD^2 \\ & (2_kI + 2_{k+1}D^2 \rightarrow 2_{k+1}D) \\ \textcircled{3} & k_{+1}I \rightarrow k_{+2}D + k_{+1}D^2 \\ \textcircled{4} & k_{+1}D^2 + 2_kD^2 \rightarrow kD^2 \\ & (k_{+1}D^2 \rightarrow 2_{k+1}D^2 + kD^2) \\ \textcircled{5} & k_{+2}D + 2_{k+1}D \rightarrow k_{+1}D \\ \textcircled{6} & k_{+1}D + kD^2 \rightarrow kI \end{array} \right. \quad (\text{B.3.2})$$

● ケース (2)

図 B.3.2: DI 分岐 (2).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} & kD + 2_{k+1}D \rightarrow k_{+1}D \\ \textcircled{2} & k_{+1}D \rightarrow k_{+2}I + k_{+1}D^2 \\ \textcircled{3} & k_{+1}D^2 \rightarrow kD^2 + 2_{k+1}D^2 \\ \textcircled{4} & k_{+2}I \rightarrow k_{+1}I + 2_{k+2}I \\ \textcircled{5} & k_{+1}I + kD^2 \rightarrow kD \\ \textcircled{6} & 2_{k+2}I + 2_{k+1}D^2 \rightarrow 2_{k+1}D \end{array} \right. \quad (\text{B.3.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} & kI + 2_{k+1}I \rightarrow k_{+1}I \\ \textcircled{2} & k_{+1}I \rightarrow k_{+2}D + k_{+1}D^2 \\ \textcircled{3} & k_{+1}D^2 \rightarrow kD^2 + 2_{k+1}D^2 \\ \textcircled{4} & k_{+2}D \rightarrow k_{+1}D + 2_{k+2}D \\ \textcircled{5} & k_{+1}D + kD^2 \rightarrow kI \\ \textcircled{6} & 2_{k+2}D + 2_{k+1}D^2 \rightarrow 2_{k+1}I \end{array} \right. \quad (\text{B.3.4})$$

● ケース (3)

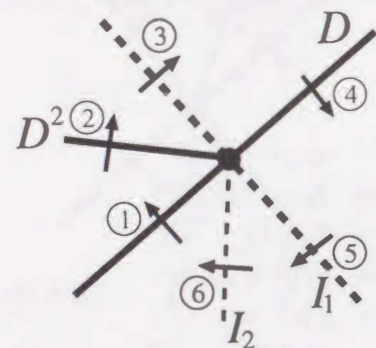


図 B.3.3: DI 分岐 (3).

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad kD + 2k+1D \rightarrow k+1D \\ \textcircled{2} \quad k+1D^2 + 2k+2D^2 \rightarrow k+2D^2 \\ \quad (k+1D^2 \rightarrow 2k+1D^2 + k+2D^2) \\ \textcircled{3} \quad k+1D + k+2D^2 \rightarrow k+2I \\ \textcircled{4} \quad k+2I \rightarrow 2k+2I + k+1I \\ \textcircled{5} \quad k+1I \rightarrow kD + k+1D^2 \\ \textcircled{6} \quad 2k+2I \rightarrow 2k+2D^2 + 2k+1D \\ \quad (2k+2I + 2k+1D^2 \rightarrow 2k+1D) \end{array} \right. \quad (\text{B.3.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad kI + 2k+1I \rightarrow k+1I \\ \textcircled{2} \quad k+1D^2 + 2k+2D^2 \rightarrow k+2D^2 \\ \quad (k+1D^2 \rightarrow 2k+1D^2 + k+2D^2) \\ \textcircled{3} \quad k+1I + k+2D^2 \rightarrow k+2D \\ \textcircled{4} \quad k+2D \rightarrow 2k+2D + k+1D \\ \textcircled{5} \quad k+1D \rightarrow kI + k+1D^2 \\ \textcircled{6} \quad 2k+2D \rightarrow 2k+2D^2 + 2k+1I \\ \quad (2k+2D + 2k+1D^2 \rightarrow 2k+1I) \end{array} \right. \quad (\text{B.3.6})$$

● ケース (4)

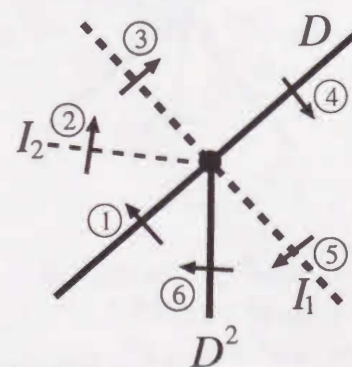


図 B.3.4: DI 分岐 (4).

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad kD \rightarrow k+1D + 2kD \\ \textcircled{2} \quad 2kD + 2k+1D^2 \rightarrow 2k+1I \\ \textcircled{3} \quad k+1D + k+2D^2 \rightarrow k+2I \\ \textcircled{4} \quad k+2I + 2k+1I \rightarrow k+1I \\ \textcircled{5} \quad k+1I \rightarrow kD + k+1D^2 \\ \textcircled{6} \quad k+1D^2 \rightarrow k+2D^2 + 2k+1D^2 \end{array} \right. \quad (\text{B.3.7})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad kI \rightarrow k+1I + 2kI \\ \textcircled{2} \quad 2kI + 2k+1D^2 \rightarrow 2k+1D \\ \textcircled{3} \quad k+1I + k+2D^2 \rightarrow k+2D \\ \textcircled{4} \quad k+2D + 2k+1D \rightarrow k+1D \\ \textcircled{5} \quad k+1D \rightarrow kI + k+1D^2 \\ \textcircled{6} \quad k+1D^2 \rightarrow k+2D^2 + 2k+1D^2 \end{array} \right. \quad (\text{B.3.8})$$

B.4 D 型分枝と Neimark-Sacker 分岐の交わり

D 型分枝と Neimark-Sacker 分岐の交わりによる余次元 3 の分岐について、解の発生する方向と位相的性質により分類を行うと、以下に示す 6 種類に分類できる。図 B.4.1 では、固定点の D 型分枝集合 D と Neimark-Sacker 分岐集合 N_1 が黒丸で交わることにより、D 型分枝 D により発生した 2 つの固定点の Neimark-Sacker 分岐 N_2 が発生する。 N_2 により発生した 2 つの ICC (invariant closed curve) はパラメータの変化に対して、1 つの ICC となり、 N_1 で発生した ICC と対になって消滅する。図 B.4.2 では、固定点の D 型分枝集合 D と Neimark-Sacker 分岐

岐集合 N が黒丸で交わることにより、D 型分枝 D により発生した固定点の接線分岐集合 G が発生する。

● ケース (1)

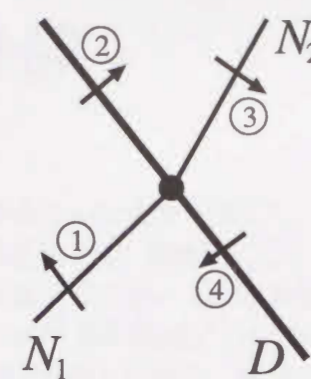


図 B.4.1: DN 分岐 (1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad kD \rightarrow k+2D + ICC \\ \quad (kD + ICC \rightarrow k+2D) \\ \textcircled{2} \quad k+2D \rightarrow k+1D + 2k+2D \\ \textcircled{3} \quad 2k+2D \rightarrow 2kD + 2ICC \\ \quad (2k+2D + 2ICC \rightarrow 2kD) \\ \textcircled{4} \quad k+1D + 2kD \rightarrow kD \end{array} \right. \quad (\text{B.4.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad kI \rightarrow k+2I + ICC \\ \quad (kI + ICC \rightarrow k+2I) \\ \textcircled{2} \quad k+2I \rightarrow k+1I + 2k+2I \\ \textcircled{3} \quad 2k+2I \rightarrow 2kI + 2ICC \\ \quad (2k+2I + 2ICC \rightarrow 2kI) \\ \textcircled{4} \quad k+1I + 2kI \rightarrow kI \end{array} \right. \quad (\text{B.4.2})$$

● ケース (2)

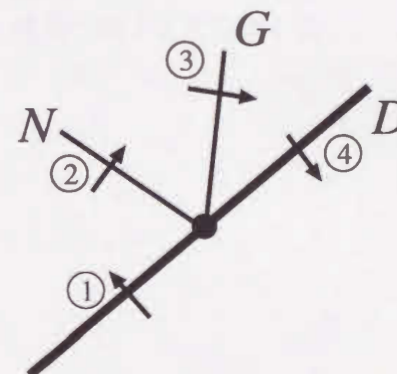


図 B.4.2: DN 分岐 (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad kD + 2k-1D \rightarrow k-1D \\ \textcircled{2} \quad k-1D \rightarrow k+1D \\ \textcircled{3} \quad \phi \rightarrow 2k-1D + 2kD \\ \textcircled{4} \quad k+1D + 2kD \rightarrow kD \end{array} \right. \quad (\text{B.4.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad kD + 2k+1D \rightarrow k+1D \\ \textcircled{2} \quad k+1D \rightarrow k-1D \\ \textcircled{3} \quad \phi \rightarrow 2k+1D + 2kD \\ \textcircled{4} \quad k-1D + 2kD \rightarrow kD \end{array} \right. \quad (\text{B.4.4})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad kI + 2k-1I \rightarrow k-1I \\ \textcircled{2} \quad k-1I \rightarrow k+1I \\ \textcircled{3} \quad \phi \rightarrow 2k-1I + 2kI \\ \textcircled{4} \quad k+1I + 2kI \rightarrow kI \end{array} \right. \quad (\text{B.4.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad kI + 2k+1I \rightarrow k+1I \\ \textcircled{2} \quad k+1I \rightarrow k-1I \\ \textcircled{3} \quad \phi \rightarrow 2k+1I + 2kI \\ \textcircled{4} \quad k-1I + 2kI \rightarrow kI \end{array} \right. \quad (\text{B.4.6})$$

謝辞

本論文の全過程を通じて、直接理解ある御指導と御鞭撻を賜りました徳島大学工学部電気電子工学科 川上 博教授に心から感謝の意を表します。

本論文の作成にあたり貴重な示唆を賜りました徳島大学工学部電気電子工学科 牛田 明夫教授、木内 陽介教授に心から御礼申し上げます。

日頃有益な御助言、暖かい励ましの言葉を頂きました徳島大学工学部電気電子工学科 吉永 哲哉助教授、同学部知能情報工学科 上田 哲史講師に深く感謝致します。

研究室において暖かい励ましの言葉を頂きました徳島大学工学部電気電子工学科 久保 智裕講師、服部 敦美助手、田村 宏文技官に深く感謝致します。

日頃有益な議論をして頂いた川上研究室 OB の Dr. Mozammel Hoque, Dr. Olivier Papy, 宇部高専情報工学科 勝田 祐司助教授、徳島大学工学部電気電子工学科 西尾 芳文助教授、長篠 博文講師および阿南高専電気工学科 中村 雄一助手に深く感謝致します。

計算機の使用に関して御助力頂いた徳島大学工学部電気電子工学科 大家 隆弘講師、同大学医療技術短期大学部 芥川 正武助手に深く感謝致します。

暖かい励ましの言葉を頂きました阿南高専電気工学科 近藤 敬一教授に心から感謝致します。
最後に励ましの言葉を頂いた川上研究室の OB に感謝致します。

文献

参考文献

- [1] T. Hirao, H. Nagashino and Y. Kinouchi, "Recruitment and Annihilation of the Oscillatory Activities in Coupled Neural Oscillators," Proc. NOLTA'96, pp.5-8, Kouchi, Japan, Oct. 1996.
- [2] J.J. Collins and I. Stewart, "Coupled Nonlinear Oscillators and the Symmetries of Animal Gaits," J. Nonlinear Science, vol.3, pp.349-392, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [3] T. Yoshinaga and H. Kawakami, "Bifurcations in Coupled BVP Equations with Forcing Term," Proc. ISCAS'91, vol.5-5, pp.2697-2700, June 1991.
- [4] 川村浩, "脳とリズム," 第1章, 朝倉書店, 1989.
- [5] 吉永哲哉, "非線形回路にみられる余次元2の分岐および結合発振器回路の解析," 慶應義塾大学博士論文, 1992.
- [6] J.C. Alexander, "Patterns at primary Hopf bifurcations of a plexus of identical oscillators," SIAM J. Appl. Math., vol.46, no.2, pp.199-221, April 1986.
- [7] H. Kawakami, "Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters," IEEE Trans. Circuits & Syst., vol.CAS-31, no.3, pp.248-260, March 1984.
- [8] M. Golubitsky and D.G. Schaeffer, "Singularities and Groups in Bifurcation Theory," Vol.I, Springer-Verlag, New York 1985.
- [9] M. Golubitsky, I. Stewart and D.G. Schaeffer, "Singularities and Groups in Bifurcation Theory," Vol.II, Springer-Verlag, New York 1988.
- [10] O. Papy and H. Kawakami, "Symmetrical properties and bifurcations of the equilibria for a resistively coupled oscillator with hybrid connection," IEICE Trans. vol.E78-A, no.12, pp.1822-1827, Dec. 1995.

- [11] O. Papy and H. Kawakami, "Symmetrical properties and bifurcations of the periodic solutions for a hybrid coupled oscillator," IEICE Trans. vol.E78-A, no.12, pp.1816-1821, Dec. 1995.
- [12] 川上博, 勝田祐司, 柴田宗量, "結合発振器の対称性を利用した周期解の計算," 信学技法, NLP94-18, pp.53-60, May 1994.
- [13] 南雲仁一編, "バイオニクス," 第2章, 情報科学講座 B-9-1, 共立出版, 1966.
- [14] A.N. Bautin, "Qualitative investigation of a particular nonlinear system," PPM, vol.39, no.4, pp.606-615, 1975.
- [15] 勝田祐司, 川上博, "対称性をもつ非線形自律系に見られる平衡点と周期解の分岐," 信学論(A), vol.J75-A, no.6, pp.1035-1044, June 1992.
- [16] 勝田祐司, 川上博, "対称性をもつ非線形非自律系に見られる平衡点と周期解の分岐," 信学論(A), vol.J76-A, no.12, pp.1753-1760, Dec. 1993.
- [17] 能美恭史, 川上博, "2重対称な結合発振器の強制同期," 信学技法, NLP96-172, pp.101-108, March 1997.
- [18] Y.A. Kuznetsov, "Elements of Applied Bifurcation Theory," Springer-Verlag, New York, 1995.
- [19] J. Guckenheimer and P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields," Springer-Verlag, New York, 1983.
- [20] H. Nagashino, K. Kakuyama and Y. Kinouchi, "Generation of traveling wave mode in a chained neural oscillator network model," IEEE Int.Conf. on Neural Networks, 1993.
- [21] J.J. Collins and I. Stewart, "A group-theoretic approach to rings of coupled biological oscillators," Biol. Cybern., vol.71, pp.95-103, 1994.
- [22] 中村雄一, 川上博, "対称性を持つニューラルネットワークの発振モードについて," 信学技法, NLP96-14, pp.23-30, May 1996.
- [23] K. Tsutsumi and H. Matsumoto, "Ring neural network qua a generator of rhythmic oscillation with period control mechanism," Biol. Cybern., vol.51, pp.181-194, 1984.
- [24] W.O. Friesen and G. Stent, "Generation of a locomotory rhythm by a neural network with recurrent cyclic inhibition," Biol. Cybern., vol.28, pp.27-40, 1977.
- [25] 山本敏章, 川上博, "一方向性巡回結合回路による発振器の構成," 信学'96 総合大会, A-64, March 1996.
- [26] 勝田祐司, "対称性を有する非線形回路の解析," 徳島大学博士論文, 1995.
- [27] 寺田至, 原田耕一郎, 群論, 現代数学の基礎 14, 岩波書店, 1997.
- [28] T. Endo and S. Mori, "Mode analysis of a ring of a large number of mutually coupled van der Pol oscillators," IEEE Trans. Circuit & Syst., vol.CAS-25, no.1, pp.7-18, Jan. 1978.

- [29] O. Papy, "Analysis and Simulation of Bifurcation and Chaos in Coupled Oscillators," solutions for a hybrid coupled oscillator," Doctor thesis, The University of Tokushima, 1996.
- [30] Y. Setou, Y. Nishio and A. Ushida, "Synchronization phenomena in resistively coupled oscillators with different frequencies," IEICE Trans. vol.E79-A, no.10, pp.1575-1580, Oct. 1996.
- [31] T. Yoshinaga and H. Kawakami, "Codimension two bifurcation and its computational algorithm," in Bifurcation and Chaos: Theory and Applications, ed. J. Awrejcewicz, pp.97-132, Springer-Verlag, Berlin 1995.
- [32] V.I. Arnold, "Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations," Springer-Verlag, New York, 1983.
- [33] M. Qriouet and C. Mira, "Fractional Harmonic Synchronization in the Duffing-Rayleigh Differential Equation," Int. J. Bifurcation and Chaos, vol.4, no.2 pp.411-426, 1994.
- [34] 中村雄一, 川上博, "硬い発振器にみられる同期振動の分岐," 信学論(A), vol.J78-A, no.11, pp.1460-1467, Nov. 1995.
- [35] 川上博, 酒井昌也, "ダフティング・レイリー方程式にみられる同期化現象," 信学技法, NLP83-37, 1984.
- [36] T. Yoshinaga and H. Kawakami, "Codimension two bifurcation problems in forced nonlinear circuits," Trans. IEICE, vol.E73, pp.817-824, June 1990.
- [37] T. Yoshinaga and H. Kawakami, "A property of mean value defined on period doubling cascade," in Bifurcation phenomena in nonlinear systems and theory of dynamical systems, ed. H. Kawakami, Advanced Series in Dynamical systems, vol.8, pp.183-195, World Scientific, Singapore, 1989.
- [38] H. Kawakami, "Bifurcation and chaotic state in forced oscillatory circuits containing saturable inductors," Int. J. of Applied Electromagnetics in Materials, vol.3, pp.215-220, 1992.
- [39] 川口永弘, "高次元非線形系の定性的研究," 昭和58年度修士論文, 徳島大学, 1984.
- [40] 吉永哲哉, 川上博, "カスプを含む接線分岐曲線の計算法," 信学'91 春大, A-92, March 1991.

本研究に関連する原著論文

- [1] 北島博之, 川上博, “接線分岐曲線を自動追跡するアルゴリズムとその Duffing 方程式への応用,” 信学論 (A), vol.J78-A, no.7, pp.806-810, July 1995.
- [2] T. Yoshinaga, H. Kitajima and H. Kawakami, “Bifurcations in a Coupled Rössler System,” Trans. IEICE, vol.E78-A, no.10, pp.1276-1280, Oct. 1995.
- [3] 北島博之, 川上博, “固定点多様体を追跡する 1 アルゴリズムについて,” 信学論 (A), vol.J79-A, no.5, pp.1122-1124, May 1996.
- [4] H. Kitajima, T. Yoshinaga and H. Kawakami, “Codimension Two Bifurcation Observed in a Phase Converter Circuit,” Trans. IEICE, vol.E79-A, no.10, pp.1563-1567, Oct. 1996.
- [5] 北島博之, 川上博, “周期倍分岐と Neimark-Sacker 分岐列について,” 信学論 (A), vol.J80-A, no.3, pp.491-498, March 1997.
- [6] T. Yoshinaga, H. Kitajima, H. Kawakami and C. Mira, “A Method to Calculate Homoclinic Points of a Two-dimensional Noninvertible Map,” Trans. IEICE, vol.E80-A, no.9, pp.1560-1566, Sep. 1997.
- [7] H. Kitajima, Y. Katsuta and H. Kawakami, “Bifurcations of Periodic Solutions in a Coupled Oscillator with Voltage Ports,” Trans. IEICE (印刷中).

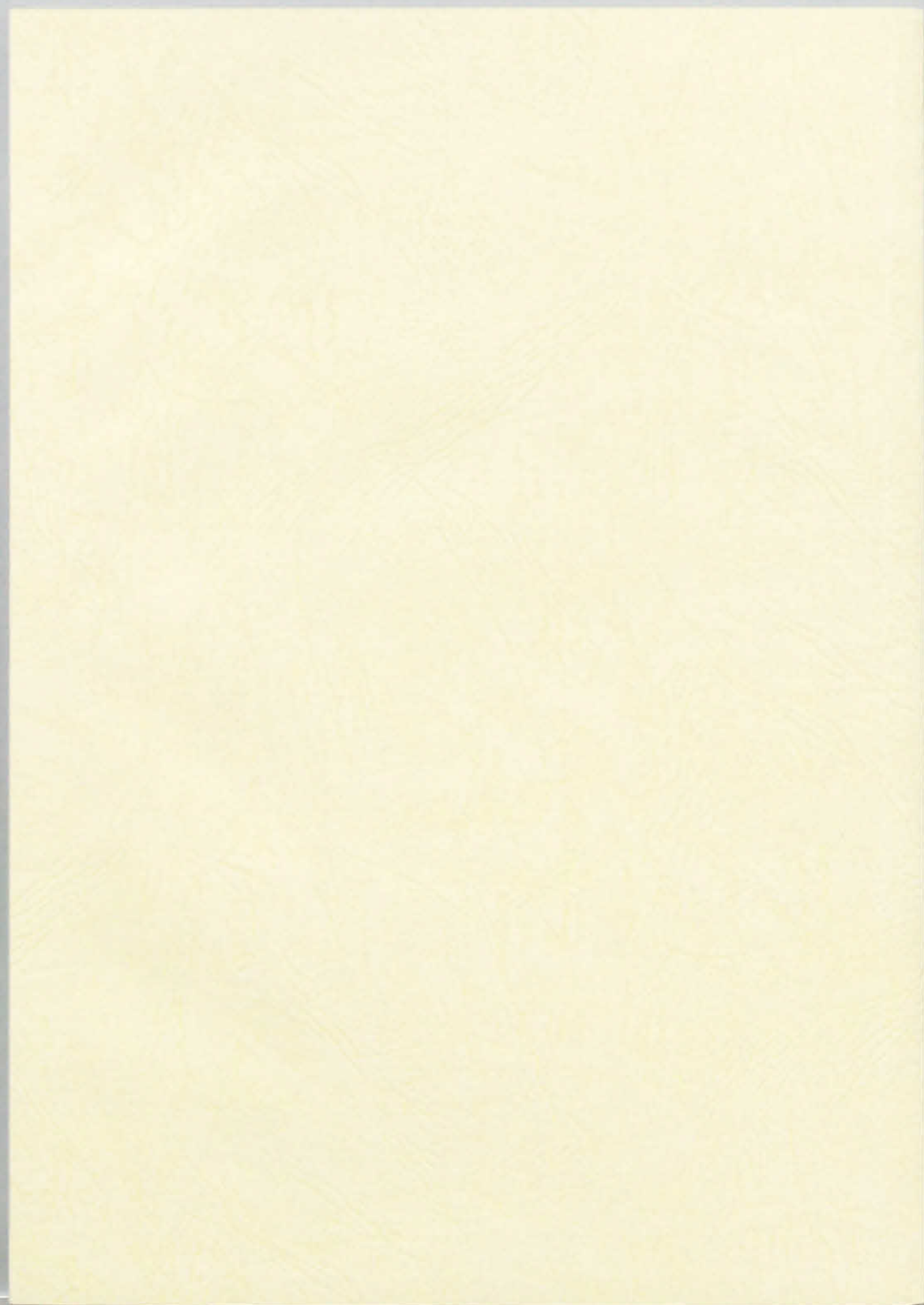
本研究に関連する国際会議

- [1] H. Kitajima, T. Yoshinaga and H. Kawakami, “Synchronization in two coupled oscillators with three ports,” Proc. NOTLA'94, pp.89-92, Ibusuki, Japan, Oct. 1994.
- [2] H. Kitajima, T. Yoshinaga and H. Kawakami, “Codimension two bifurcation observed in a phase converter circuit,” Proc. NOTLA'95, pp.335-338, Las Vegas, U.S.A. Dec. 1995.
- [3] H. Kitajima and H. Kawakami, “Bifurcation of a unidirectional coupled oscillators,” Proc. NOTLA'96, pp.21-24, Kouchi, Japan, Oct. 1996.
- [4] H. Kitajima and H. Kawakami, “Bifurcation and chaos in unidirectionally coupled oscillators,” Proc. NOTLA'97, pp.65-68, Hawaii, U.S.A., Nov. 1997.
- [5] H. Kitajima, Y. Noumi and H. Kawakami, “Forced synchronization of coupled oscillators,” Proc. NOTLA'97, pp.573-576, Hawaii, U.S.A., Nov. 1997.

本研究に関連する学会研究会資料等

- [1] 北島博之, 川上博, 久保智裕, “分岐曲線を自動追跡できる計算法について,” 平 5 四国連大, pp.14, Oct. 1993.
- [2] 北島博之, 吉永哲哉, 川上博, 久保智裕, “MRI 撮像中の体動により影響を受けた MR 信号のウェーブレット係数,” 信学'94 春大, A-117, March 1994.
- [3] 北島博之, 川上博, “接線分岐曲線を自動追跡するアルゴリズムとその Duffing 方程式への応用,” 信学技報, NLP94-1, pp.1-7, May 1994.
- [4] 吉永哲哉, 北島博之, 川上博, “結合油水発振器にみられる分岐,” 信学技報, NLP94-54, pp.105-112, Sept. 1994.
- [5] 北島博之, 吉永哲哉, 川上博, “抵抗で結合した油水発振器の分岐,” 平 6 四国連大, pp.15, Oct. 1994.
- [6] 北島博之, 吉永哲哉, 川上博, “結合 2 次写像にみられる分岐現象,” 信学'95 総大, A-64, March 1995.
- [7] 吉永哲哉, 北島博之, 川上博, “環状に結合した 2 次写像にみられる分岐,” 信学'95 総大, SA-2-7, March 1995.
- [8] 北島博之, 吉永哲哉, 川上博, “位相変換器回路にみられる余次元 2 の分岐,” 平 7 四国連大, pp.5, Nov. 1995.
- [9] 北島博之, 川上博, “周期倍分岐と Neimark-Sacker 分岐列について,” 信学技報, NLP95-77, pp.101-108, Nov. 1995.
- [10] 川上博, 田村宏文, 北島博之, “ウィーンブリッジ発振器を用いたカオス発振回路,” 信学技報, NLP95-108, pp.17-24, March 1996.
- [11] 三原達也, 北島博之, 川上博, “ハイブリット結合した Duffing-Rayleigh 発振器の分岐とカオス,” 信学技報, NLP95-112, pp.49-55, March 1996.
- [12] 北島博之, 川上博, “Neimark-Sacker 分岐集合上にみられる共振,” 信学'96 総大, A-58, March 1996.
- [13] O. Papy, H. Kitajima and H. Kawakami, “Symmetry Breaking for 3 Coupled Systems,” General Conference of IEICE, A-66, March 1996.
- [14] 北島博之, 川上博, “結合カオス発振器回路の分岐,” 信学技報, NLP96-10, pp.63-68, May 1996.
- [15] 吉永哲哉, 北島博之, 川上博, C. Mira, “ある 2 次元非可逆写像にみられるホモクリニック点の計算法,” 信学技報, NLP96-33, pp.165-172, May 1996.

- [16] 北島博之, 川上博, “一方向性結合回路にみられる同期現象,” 平8 四国連大, pp.11, Oct. 1996.
- [17] 北島博之, 川上博, “一方向性巡回結合発振器にみられる分岐,” 信学技報, NLP96-144, pp.25-32, Feb. 1997.
- [18] 北島博之, 能美恭史, 勝田祐司, 川上博, “電圧結合発振器に生じる周期振動の分岐,” 信学技報, NLP97-1, pp.1-8, May 1997.
- [19] 三島孝史, 北島博之, 勝田祐司, 川上博, “結合発振器にみられる周期振動の発生と型について,” 信学技報, NLP97-33, pp.147-152, May 1997.
- [20] 北島博之, 川上博, “一方向性巡回結合発振器にみられる発振現象,” 信学'97 総大, A-2-28, March 1997.
- [21] 北島博之, 川上博, “一方向性巡回結合発振器にみられる発振モード,” 平9 四国連大, pp.29, Oct. 1997.
- [22] 上田哲史, 北島博之, 川上博, “3個の結合された2次写像の時空カオスの挙動,” 平9 四国連大, pp.21, Oct. 1997.
- [23] 北島博之, 川上博, “結合発振器の周期解の分岐,” 中津川力学系研究集会, Jan. 1998.



論文審査の結果の要旨

報告番号	甲 工 乙 工 第 113 号 工 修	氏 名	北 島 博 之
審査委員	主 査 川 上 博 副 査 牛 田 明 夫 副 査 木 内 陽 介		
学位論文題目 非線形系の構造に基づく分岐現象とカオスの解析			
審査結果の要旨 <p>本論文は，結合発振器系の分岐現象，余次元の高い分岐とカオス，分岐集合を求めるアルゴリズムについて述べている．結合発振器は動物の歩行，睡眠・覚醒のリズムなど，生物の様々なリズム現象を表すモデルとして広く用いられる．</p> <p>最初の 2 章で問題の提起と解析手法について述べた後，第 3 章で，2 個の発振器を抵抗で結合した系の解析結果を示している．この結果は一般に n 個の発振器を結合した系を解析する基礎を与えている．次に，系にみられる対称性に着目して，平衡点と周期解を分類，異なる対称性をもつ平衡点と周期解の対称性破壊分岐の過程を解明している．特に，対称性のない周期解が周期倍分岐の連鎖によりカオスへと至る遷移過程の詳細な解析がなされている．</p> <p>第 4 章では，発振器を環状に一方向及び双方向に結合した系が解析されている．結合部分だけに着目すると，一方向性結合では巡回群，双方向性結合では 2 面体群を持つ．発振器が平衡点のみを持つ場合 n 個の発振器を結合した一般形での平衡点の分岐構造を解明している．結果として，双方向性結合では発振は起こらず，一方向性結合では Hopf 分岐により n 相周期解が生じることを得ている．単体の発振器が周期解をもつ場合は，一般形での解析が困難となるので発振器の個数を 3 個に限定して解析を進めている．</p> <p>第 5 章では，余次元 2 の分岐の連鎖，余次元 3 の分岐の連鎖によるカオスへの遷移過程が解析されている．一般的に高次元となる結合発振器系において，余次元 1 および 2 の分岐集合が互いに交わる退化した現象は普遍的にみられる．本章ではこれらの現象がみられる最小次元系において，余次元 2・3 の分岐値付近での分岐構造を解析している．</p> <p>第 6 章では，分岐集合を数値計算により求める場合の自動追跡アルゴリズムを示している．すなわち，接線分岐集合または固定点多様体を求める場合，従来のアルゴリズムでは特異点において計算出来なかったが，新しく提案したアルゴリズムを用いることによりこれを可能とし，連続的に接線分岐集合または固定点多様体を求めることができることを示している．具体的に Duffing 方程式，Duffing-Rayleigh 方程式にこのアルゴリズムを適用し，手法の正当性および有用性を実証している．</p> <p>以上本研究は，非線形系の構造に基づく分岐現象とカオスに関する基礎的研究を行ったものであり，本論文は博士（工学）の学位授与に値するものと判定する．</p>			